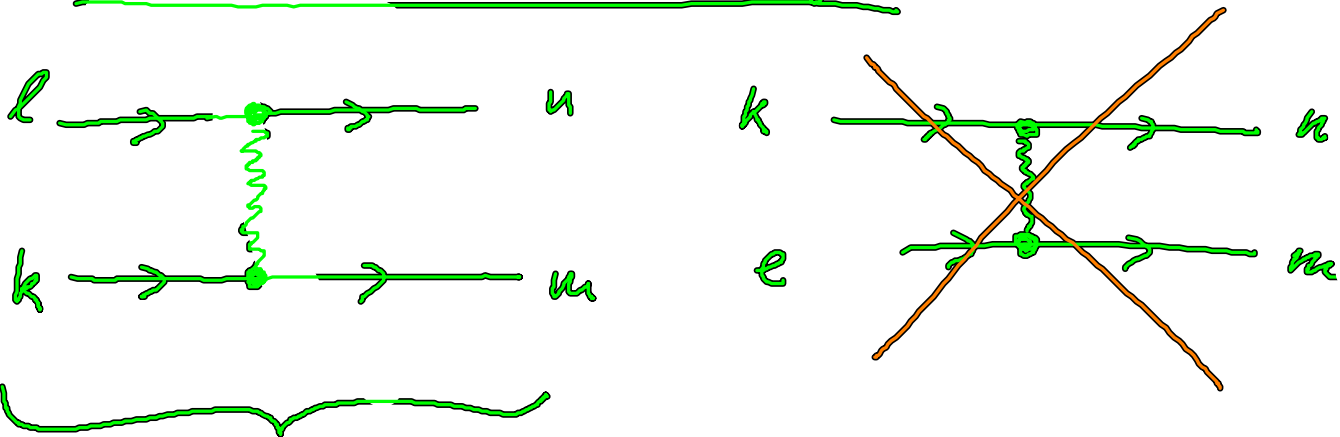


# Notation für die Wechselwirkung

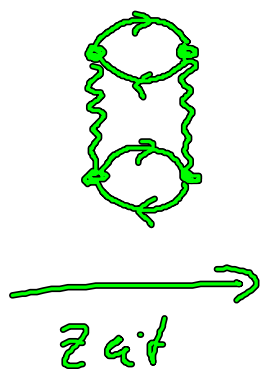


entspricht gängiger Literatur, wenn

$$V = \frac{1}{2} \sum_{u, m, e, k} V_{u, m, e, k} a_u^\dagger a_m^\dagger a_k a_e$$

sind ab jetzt gemeint, somit alle Diagramme gehen

Erinnerung: Konnte Eigenschaften von wechselwirkenden Systemen (Zustandsraum, etc.) mittels Diagrammen schreiben, Bsp.:

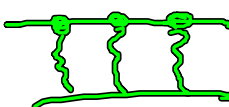



$\hat{=}$  enthält Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse  $\rightarrow$  durch die Wechselwirkung  $\vdots$  zur

# Zurück auf Zurück

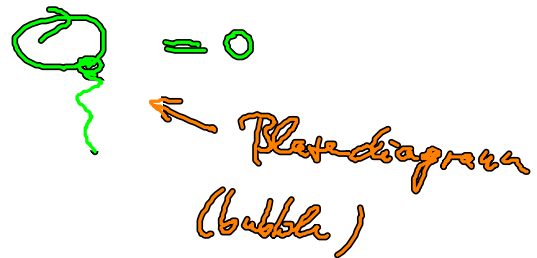
- Idee:
- Rechnen und Interpretieren wichtiger Diagramme ansfordig zu machen und zurück zu übersetzen
  - man kann auch mit Diagrammen rechnen

- wichtige Diagramme: dichte Elektronengas  $\rightarrow$   Ringdiagramme 

- gerichtetes Elektronengas:   $\leftarrow$  Leiterdiagramme 

- unwichtige Diagramme:

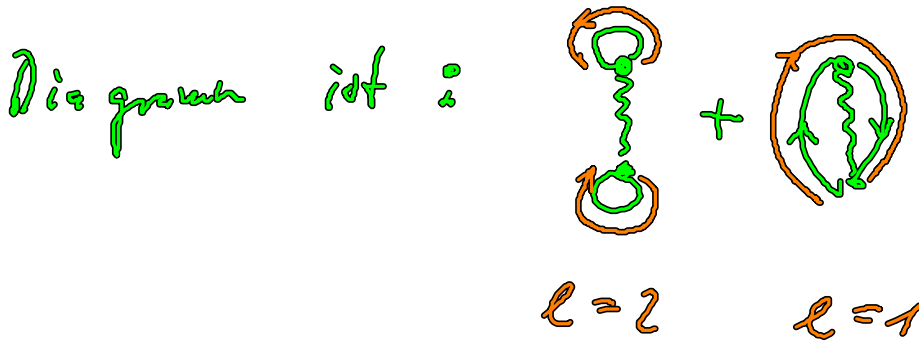
Feynmanmodell



Übersetzungsregel v. Diagrammen in Formeln:

- 1) über alle inneren Vertizes  $(u_i, v_i, t_i)$  wird summiert ( $\sum$  hinschreiben); über alle Zeitpunkte  $t_i$  wird integriert ( $\int dt_1 \dots \int dt_n$ ).

2) jedes Diagramm bekommt Vorzeichen  $(-1)^L$ , wobei  $L$  die Anzahl geschlossener Fermionenschleifen im



3) Vorfaktor  $\frac{1}{4!}$  hinschreiben und weiter

(Vorfaktor)<sup>4</sup> die aus der LW kommen aufschreiben:

Bsp:  $\Delta E \sim \langle T e^{-\int d^4p' U(p')} \rangle \Rightarrow \cdot (-1)^4$

↑  
Vorfaktor in LW

Coulomb-WW  $\frac{1}{2} \underbrace{U_{\mu\nu\alpha\beta}}_{\hat{=}} \dots \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4$

4) alle Propagator und WW-Linie als Formeln schreiben:

$$\left( \begin{array}{c} \rightarrow G \\ \leftarrow G^{\dagger} \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} V_{unlk} \right),$$

hier alles multipliziert,

bei  $G$ : Zeitargument, Indexargument

5) beachte: ob man in  $\beta$  oder  $t$ -Bild

$$\left( \beta \sim i \frac{t}{t} \right)$$

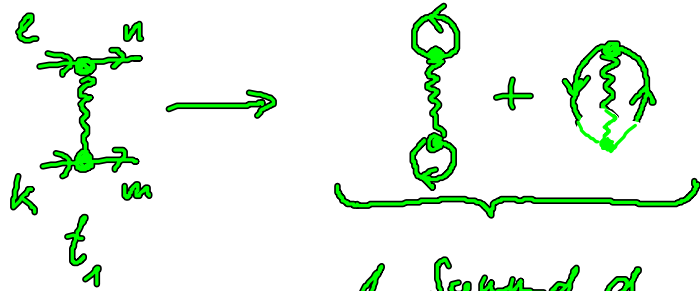
### Beispiele

(i) erste Ordnung Coulomb-WW:

$$- \frac{1}{2} \sum_{unlk} V_{unlk} a_n^{\dagger} a_m^{\dagger} a_k a_e = V$$

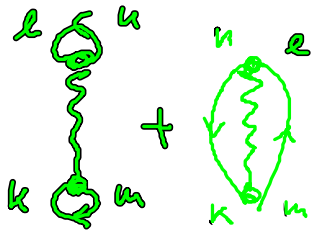
f. Zählsumme,  $\beta$ -Bild

1. Ordnung: alle Diagramme



1. Saund d. zeitgen. L Exp. Fkt.

Rid übersetzung:



$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar} \sum_{k, m} \dots$$

$$\int_0^\beta \int_0^{\beta_1} (-1)^2 V_{umek} G_{ue}(\beta_1 - \beta_2) G_{mk}(0)$$

Loop e

weil weiter bei  
1 Zeit liegt die  
andere  
Lind

Coulon WW,  
Fehlertät

$$+ (-1)^1 V_{umek} G_{mk}(0) G_{ue}(0)$$

(2)

$$G_{mk}(0) = \delta_{mk} f_k$$

Renormalisation

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k, m} (V_{umek} f_k f_m - V_{umek} f_k f_m) / \beta$$

$$\Delta E = -\partial_\beta W_1 = -\partial_\beta \left( \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} + (1) \right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \sum_{k, m} (V_{umek} - V_{umek}) f_k f_m$$

(1) (2)

Vielteilchen-WW - induzierte Energiekorrektur

1. Ordnung

Teilchenorbitale

$$V_{1234} \approx \iint d\vec{r} \int d\vec{r}' \frac{\varphi_1^*(\vec{r}) \varphi_2^*(\vec{r}') \varphi_3(\vec{r}) \varphi_4(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

① :  $1=3, 2=4 \rightarrow |\varphi_1(\vec{r})|^2 |\varphi_2(\vec{r}')|^2$

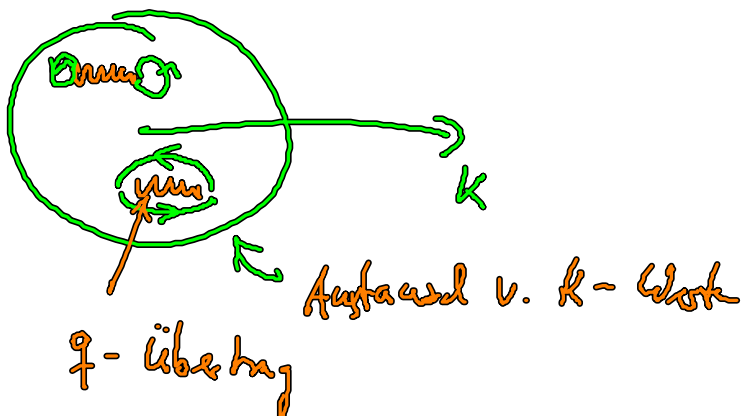
$\rightarrow$  WW zweier Ladungsdichten  $\rightarrow$  Hartree-Fock (klassisch)

② :  $1=4, 2=3 \rightarrow \underbrace{\varphi_1^*(\vec{r}) \varphi_1(\vec{r}') \varphi_2^*(\vec{r}') \varphi_2(\vec{r})}_{\text{Austausch}}$

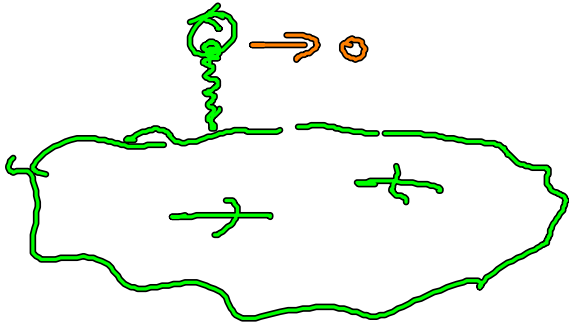
$\rightarrow$  Austauschwechselwirkung

$\Delta E \hat{=}$  die Hartree-Fock Gleichung der QM.

im k-Raum :



(ii) im räumlich homogenen  $\mathcal{L}$ -fall entwickeln die Blase:




$$V_{k_u k_e} = \delta_{\lambda_u \lambda_e} \delta_{\lambda_u \lambda_k} \delta_{k_e + k_u, k_e + k_k} V_{k_u - k_e}$$

$$V_{k_u - k_e} = V_q \sim \frac{1}{q^2}$$

im Jellium-Modell ist immer  $q \neq 0$

wie man sieht fordert die Blase  $k_u = k_e$  wegen  $\delta_{k_e}$

$\rightarrow q = 0$  für   $\rightarrow$  ist verboten

(Vorlesung: Grundlage)

(iii) Übersetzung v. Diagramm 2. Ordnung  $\langle T e^{-\int_0^T dp' u(p')} \rangle$

$$= (-1)^{n_1} \frac{e_1}{2!} (-1)^{n_2} \frac{e_2}{2!} \sum_{\text{Indices}} \int_0^\beta d\beta_1 \int_0^\beta d\beta_2 V_{n_1, n_2, e_1, k_1} V_{n_2, n_1, e_2, k_2}$$

$\beta_1$   $\beta_2$   
(1 aus 24)

$\uparrow$   
an  
Coulomb WB +  
Lepton

$$\left( G_{n_1, e_2}(\beta_1 - \beta_2) \cdot G_{n_1, e_2}(\beta_1 - \beta_2) \right)$$

$$\beta' = \beta_1 - \beta_2 \quad \cdot G_{n_2, e_1}^+(\beta_1 - \beta_2) G_{n_2, k_1}^+(\beta_1 - \beta_2)$$

Reduz.

$$= -\frac{1}{4} \underbrace{\int_0^\beta d\beta \int_0^\beta d\beta'}_{\text{less variable, bright } \frac{1}{2} \text{ way}} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ e_1, k_1}} V_{n_1, n_2, e_1, k_1} V_{k_1, e_1, n_1, n_2} e^{-\beta'(\epsilon_{n_1}^+ + \epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_2}^+ - \epsilon_{n_2})}$$

$$\Delta E \simeq -\frac{1}{4} \sum \frac{V_{n_1 - e_1} V_{k_1 - e_2} \delta_{n_1 - n_2, e_1 + k_1}}{(\epsilon_{n_1}^+ + \epsilon_{n_1} - \epsilon_{e_1} - \epsilon_{k_1})} \int_{e_1}^+ \int_{n_1}^+ \int_{e_2}^+ \int_{k_1}^+$$

$\uparrow$   
 $-\partial_\beta W_2$   
 $\beta \rightarrow \infty$   
( $T \rightarrow 0$ )

$$\left( G^+(1-f) \right)$$

$$\Delta E = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{q, e \\ k}} \frac{V_q V_{k-e-q}}{\epsilon_{q+e} + \epsilon_{k-q} - \epsilon_e - \epsilon_k} \int_{e+q}^+ \int_{k-q}^+ (1-f_e)(1-f_k)$$



Füge Beiträge die Hoppingprozesse im  $k$ -Raum beidseitige  
(Streu)

wobei Pauliprinzip analog der Poltzmanngleichung mit  
Besetzung  $f$  und Nichtbesetzung  $(1-f)$  ergibt.

Energieerhaltung stellt in Nenners

links Diagramm (zu Hause)

$$\text{Diagramm} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \frac{V_{\mathbf{q}}^2}{\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (1-f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) (1-f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})$$

c) Verbundene Diagramme und Diagrammsumme

$$\text{LCT: } \langle T e^{\int dt' v(t')} \rangle \Rightarrow e^{\sum \tilde{u}_e}$$

$\tilde{u}_e$  = alle verbunden Diagramme in Ordng.  $e$

diagrammatische Reduktion:

$$\langle T e^{\int dt' v(t')} \rangle = 1 + \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2}$$

0-th Order in  $V$       1-th Order in  $V$

$$+ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \dots \quad (24)$$

$$+ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \dots \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \dots$$

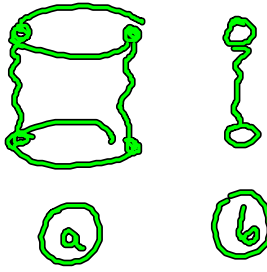
Eing: die Faktorisierung in der Zeitintegration definiert  
 nicht über die Diagramme

beachte:  $\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} = \frac{(-1)^{e=4}}{2!} \frac{1}{2^2} \sum \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \quad V V \overset{(0)}{G} \overset{(0)}{G} \overset{(0)}{G} \overset{(0)}{G}$

3 Hilfsformeln:  $= \frac{1}{2!} \left( \overset{(-1)}{2} \int_0^t dt_1 V G G \overset{(-1)}{2} \int_0^t dt_2 V G G \right)$

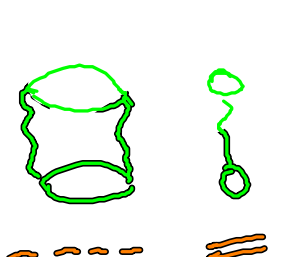
$$= \frac{1}{2!} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \cdot \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} = \frac{1}{3!} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \cdot \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \cdot \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array}$$



$$= 2$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{a} &= \frac{1}{2!} (-1)^2 \frac{1}{2^2} \int dt_1 \int dt_2 \sum v \dots v \dots \\
 &\quad G_{u_2 e_2}(t_1 - t_2) G_{a_2 e_1}^+(t_1 - t_2) \\
 &\quad G_{u_1 e_2}(t_1 - t_2) G_{u_2 e_1}^+(t_1 - t_2)
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{3!} \frac{(-1)^4}{2^3} \left( \int dt_1 \int dt_2 f(t_1, t_2) \int dt_3 f(0) \right)$$

$\frac{2!}{2!}$  ,  $\frac{1}{2!}$  Disper  
 2-Ordnig. zu ersenje

$$= \frac{1}{3!} 2! \text{ (cylinder) } \cdot \text{ (tadpole) }$$

$$= \frac{1}{3} \text{ (cylinder) } \cdot \text{ (tadpole) }$$

$$\langle T e^{\int dt' v(t')} \rangle = 1 + \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^2$$

$$+ \frac{1}{3!} \left( \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \right)^3 \dots$$

$$= e^{\int dt' v(t')}$$