

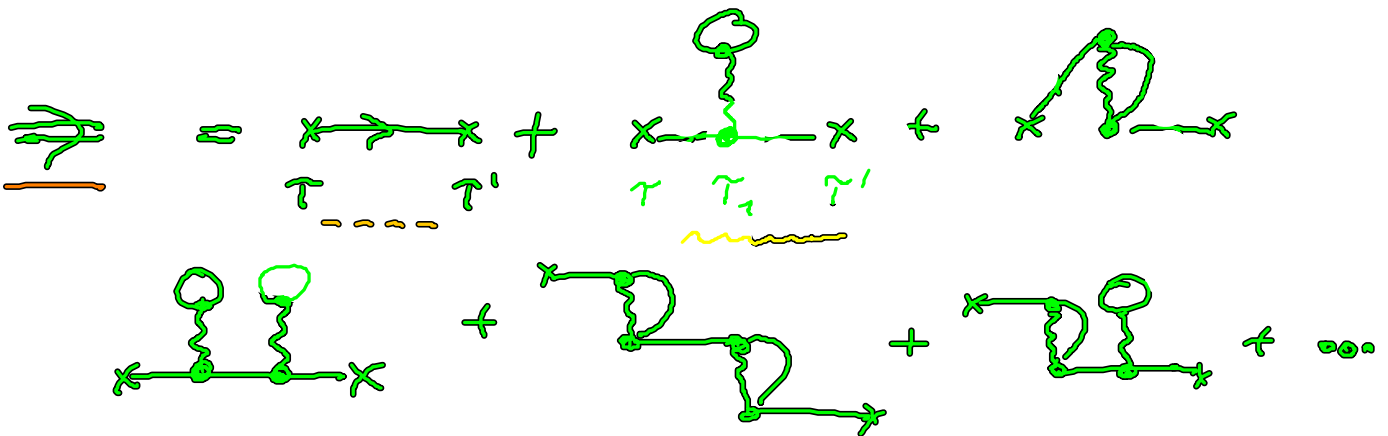
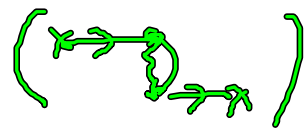
# 4.4. Dysongleichung

voller Propagator

$$G_{\text{un}}(\tau, \tau') = \sum_n \int_0^{\beta} d\tau_1 \dots \int_0^{\beta} d\tau_n \underbrace{\langle T V(\tau_1) \dots V(\tau_n) a_n^\dagger(\tau) a_n(\tau) \rangle}_{\text{verbundene Diagramme}}$$

enthält die „gesuchte Physik“ weil alle beobachtbaren Größen (Strom, Ladungsdichte) damit ausgedrückt werden können

diagrammatisch:



$$\underline{G_{\text{un}}(\tau, \tau')} = G_{\text{un}}(\tau, \tau') + \sum_{(n)} \int_0^{\beta} d\tau_1 G_{\text{un}}(\tau, \tau_1) V_{\tau_1} G(\tau_1, \tau')$$

f ...

gibt hat man Erdmde wie Störungstheorie  
 aufzubauen ist: die Graphen werden aus  
 „Erschibe“ zwischen zwei externen Zeitpunkten  
 aufgebaut.

$$\Rightarrow = \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---}$$

Summe alle Erschibe ist die Selbstenergie

$$\circlearrowleft = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

Man nennt diese Summande „Selbstenergie erschibe“

$$\circlearrowleft = \hat{M}(\Sigma) \text{ „Selbstenergie“}$$

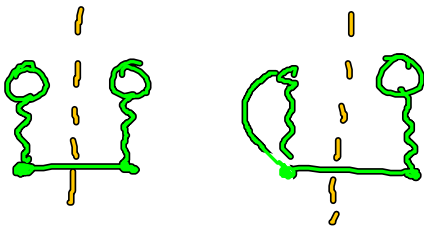
Unterschied: ( „Massenoperator“ )

- eigentliche Selbstenergie-Einzelteile (irreduzibel)

Diagramme die man nicht durch einen Schnitt durch eine Fermion-Linie in „einfachere“ Bausteine, die es auch in der Reihe gibt, zerlegen kann



- unigentliche Einzelteile: sind durch Schnitt zerlegbar (reduzibel)



Zersetzungen sind rückföhrbar

$$M = \text{tadpole} + \text{self-energy} + \text{self-energy} + \dots$$

also Summe über alle irreduziblen Diagramme wird irreduzible Selbstenergie genannt

$$\hat{M} = \text{tadpole} = \text{self-energy} + \text{self-energy} + \text{self-energy} + \dots$$

dann kann man aber für  $g_{\mu\nu}(\tau, \tau')$  weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
 &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \\
 &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \\
 &\quad + \text{---} + \dots \\
 &= \text{---} + \text{---} \cdot \underbrace{\left( \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \right)}_{=}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{= \text{---} + \text{---}}$$

Dyson gliedert wie die Diagramme schrittweise

Rückübersetzung in Formel:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(\tau, \tau') &= G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \\
 &+ \sum_{\mu_1, \mu_2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 G_{\mu\nu, \mu_1}(\tau, \tau_1) M_{\mu_1, \mu_2}(\tau_1, \tau_2) \\
 &\quad g_{\mu_2, \mu}(\tau_2, \tau')
 \end{aligned}$$

Dysongleichung in Formalsprache.

implizite Integralgleichung für  $G_{\mu\nu}(T, T')$

Wenn man sich physikalisch bei  $M$  auf bestimmte Diagramme (irreduzibel!) beschränkt, so

kann  $M$  bestimmt werden, und zwar

an WW  $V_{\text{unrel}}(\{ \}$  und  $G_{\mu\nu}(T_1, T_2)$  (—).

In  $M$  kann auch wieder bis  $\sum_{n=0}^{\infty}$  aufsummiert

werden für bestimmte Diagrammfamilien ...

(Intuition!)

Weil man kein extern zeitabhängiges Feld hat,

kann alles nur von  $T - T'$ ,  $T_n - T_k$  abhängen.

→  $\widehat{FT}$  ist sich selbst voll, um Falts eigen schäfte auszunutzen.

## hilfreiche Eigenschaft:

$$a) \rho_{\text{un}}(\tau, \tau') = \rho_{\text{un}}(\tau - \tau') = \langle T a_n^\dagger(\tau) a_n(\tau') \rangle$$

Beweis:  $\rho_{\text{un}}(\tau, \tau') = \text{sp} \left( \frac{e^{-\beta H}}{\mathcal{Z}} \underbrace{e^{\tau H} a_n^\dagger e^{-\tau H}}_{a_n^\dagger(\tau)} \underbrace{e^{\tau' H} a_n e^{-\tau' H}}_{a_n(\tau')} \right)$

$\tau > \tau'$  (✓)  $[H, a_n] = 0$

$$= \text{sp} \left( \frac{e^{-\beta H}}{\mathcal{Z}} e^{-\tau' H} a_n^\dagger e^{\tau' H} e^{-\tau H} a_n e^{\tau H} \right)$$

$$= \langle e^{(\tau - \tau')H} a_n^\dagger e^{-(\tau - \tau')H} a_n \rangle = f(\tau - \tau')$$

b)  $\rho_{\text{un}}(\tau, \tau')$  ist  $\beta$  periodisch

$$\rho_{\text{un}}(\tau - \tau' + \beta) = -\rho_{\text{un}}(\tau - \tau') \quad \text{ohne Beweis}$$

→ c) Man kann  $\rho_{\text{un}}(\tau)$  in ein Fourierreihe  
auf Intervall  $[-\beta, \beta]$  entwickeln

$$\rho_{\text{un}}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} \tilde{\rho}_{\text{un}}(s)$$

$$\tilde{p}_{un}(s) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\bar{u}s\tau/\beta} p_{un}(\tau)$$

$$f * g(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau' f(\tau - \tau') g(\tau') d\tau'$$

Faltung.

$$\widetilde{f * g(\tau)} = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$$

$$a) \tilde{p}_{un}(s) = \int_0^{\beta} d\tau e^{i\bar{u}s\tau/\beta} p_{un}(\tau)$$

kurz durch Variable substitution und  
 $\beta$ -Periodizität zeigen

geht zurück z. Dyson Gleichung:

$$p_{un}(\tau - \tau') = G_{un}(\tau - \tau')$$

$$\sum_{u_1, u_2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 G_{u_1 u_1}(\tau - \tau_1) M_{u_1 u_2}(\tau_1 - \tau_2) p_{u_2 un}(\tau_2 - \tau')$$

→

$$\tilde{p}_{un}(s) = \tilde{G}_{un}(s) + \sum_{k_1, k_2} \tilde{G}_{k_1}(s) \tilde{M}_{k_1, k_2}(s) \tilde{p}_{k_2}(s)$$

ist jetzt ein algebraische Gleichung, einfach zu lösen,  
wenn  $M$  vorgegeben ist.

## 4.5. Räumlich homogenes EL-System und das Quasitelde Konzept

Beispiel: 1-Bandsystem  $p_{un} \quad u \rightarrow k_u, \quad u \rightarrow k_u$

f. räumlich homogenes System  $k_u = k_u$

$$p_{un} = p_u \delta_{un}$$

dieser ein Index wird  $k$  genannt:

$$\tilde{p}_k(s) = \tilde{G}_k(s) + \tilde{G}_k(s) \tilde{M}_k(s) \tilde{p}_k(s)$$

$$\tilde{p}_k(s) = \frac{\tilde{G}_k(s)}{1 - \tilde{M}_k(s) \tilde{G}_k(s)} = \frac{1}{\tilde{G}_k^{-1}(s) - \tilde{M}_k(s)}$$



ist eine analytische Lösung f.  $\tilde{p}_k$  als Funktion der Selbstenergie.

Um „die Lösung“ dieser letzten Formel zu sehen

$\tilde{G}_k(s)$  berechnen:

$$\tilde{G}_k(s) = \int_0^{\beta} dt e^{\epsilon_k t} \underbrace{f_k e^{i\bar{t}s/\beta}}_{\substack{\text{L an VL frei} \\ f_k - \text{Templ. } (\gamma)}}$$

$f_k - \text{Templ. } (\gamma)$

$$= \frac{-1}{\epsilon_k + i \frac{\bar{t}s}{\beta}}$$

$$\tilde{p}_k(s) = \frac{-1}{\epsilon_k + i \frac{\bar{t}s}{\beta}}$$

$\left( \epsilon_k + i \frac{\hbar \gamma}{\beta} \right) + \tilde{M}_k(s)$

ist die freie Propagator

ist die Veränderung des Elektron im Bandstruktur durch die WW des Elektron untereinander

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0$$

da für ruhendes Elektron ( $k=0$ ) die „reine“ Energie durch  $\text{Re}(M)$  gegeben ist, heißt  $M$  Selbstenergie.

Offbar entsteht durch  $\text{Re}(M)$  eine

Energie renormierung die zu einer neuen Teilchen

führt kürztes Teilchen + Coulomb-WW mit anderen  
 (Ef-fitter)

=

Ansatzelemente

Wenn als  $\text{Im}(M)$  auch  $\Gamma$ , dann bekommt

das Quasifermionen ein Lebensdauer

$$\text{wenn } \epsilon_k + \text{Re}(M) \gg \text{Im}(M)$$

dann ist das Quasifermionen Konzept gut.

Bemerkung f. Metalle: um  $k_F$  (Fermi) (Fermi)

$$u \approx u_{\text{eff}} \left( 1 + \frac{u_{\text{eff}}}{k_F} \frac{\partial}{\partial k} \text{Re} M \Big|_{k=k_F} \right)$$

↑  
Quasifermionen,  
 $k \approx k_F$

↑  
1. Taylor

$$\tau_{\text{Lebensdauer}}^{-1} \approx \text{Im}(M) \rightarrow \text{sehr klein, ist beachtet werden}$$

$$T \rightarrow 0 \quad \tau_{\text{Lebensdauer}} \rightarrow \infty$$

$$T > 0 \quad \tau_{\text{Lebensdauer}} \sim T^{-2}$$

⇒ Metalle können als Gas freier

Quasifermionen mit renormierte Elektronen angesehen

beschrieben werden.

→ *Das Modell der Exp. Phys.*