

Wahrscheinlichkeit $P(A) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

$$P(A) \geq 0$$

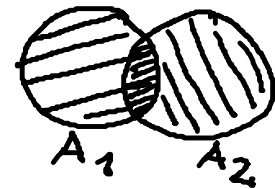
$$P(S) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{für disjunkte Ereignisse} \\ (A \cap B = \emptyset)$$

$$\Rightarrow P(A) \leq 1$$

Zerlegung beliebiger A_1, A_2 in disjunkte Ereignisse

$$(1) \quad A_1 \cup A_2 = \underbrace{A_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{disjunkte} \\ \text{Ereignisse}}} + \underbrace{A_2 \cap \bar{A}_1}$$



$$(2) \quad A_2 = \underbrace{(A_1 \cap A_2)} + \underbrace{(\bar{A}_1 \cap A_2)} = \underbrace{(A_1 \cup \bar{A}_1)}_S \cap A_2$$

$$(1) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2)$$

$$(2) \Rightarrow P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2)$$

$$\text{Also } P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

$$(2) \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2) \quad \text{falls } A_1 \subseteq A_2$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit :

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wahrscheinl. für A unter der Bedingung, dass B eintreten ist

A_1 und A_2 heißen unkorreliert, falls

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$\underline{NB} \Rightarrow P(A_1 | A_2) = P(A_1)$$

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist gegeben durch

- (i) eine Menge M von vollständig disjunkten Ereignissen (Sample set) X_i
- (ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_i)$ über M

Es gilt die Normierung $\sum_i P(X_i) = 1$

für eine kontinuierliche Menge ($x \in \mathbb{R}$) definiert

$$P(x' \leq x \leq x' + dx') = g(x') dx'$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinlichkeitsverteilung, probability distribution function pdf)

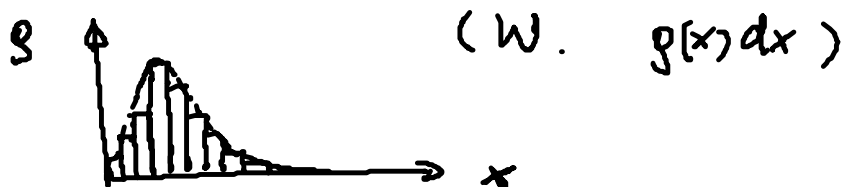
(Übergang zu diskreten Ereignissen:)

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x^{(i)}) P_i$$

Normierung: $\int_a^b dx g(x) = 1$

Phys. Interpretation

W. verteilung realisiert durch ein Ensemble von vielen äquivalenten Systemen, d.h. durch die Dichteverteilung $g(x)$ der Mitglieder des Ensembles mit Werten zwischen x und $x+dx$



Verallgemeinerung auf d Zufallsvar.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

$$d^d x = dx_1 dx_2 \dots dx_d$$

Normierung $\int d^d x g(x) = 1$

Mittelwert (Erwartungswert) einer Zufallsvar. x :

$$\langle x \rangle := \int d^d x g(x) x$$

Für bel. Funktion $\varphi(x)$:

$$\langle \varphi \rangle = \int d^d x g(x) \varphi(x)$$

NB: Der Mittelwert ist ein lin. Funktional $f_g: L \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi_2 \rangle$$

$\varphi \mapsto \langle \varphi \rangle$
 $\varphi \in L$ geeign. Fkt.raum

Unkorrelierte Zufallsvariable:

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $g(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$

Dann gilt: $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$

Beweis: $\int dx_1 dx_2 g(x_1, x_2) x_1 x_2 = \underbrace{\int dx_1 g_1(x_1) x_1}_{\langle x_1 \rangle} \underbrace{\int dx_2 g_2(x_2) x_2}_{\langle x_2 \rangle}$

Zusammenhang zwischen Wahrsch. verteilung und Mittelwerten:

v-te Moment der Wahrsch. verteil. $M_v := \langle x^v \rangle$

Momentenerzeugende: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v}{v!} M_v$

$$\left. \frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} Z(\alpha) \right|_{\alpha=0} = M_v$$

Durch die Angabe aller Momente $\alpha=0$ ist die Wahrsch. verteilung festgelegt!

Verallg. auf d. Zufallsvar.:

$$M_{v_1, v_2, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle \quad \text{Momente der Ordnung } v := v_1 + v_2 + \dots + v_d$$

Momentenerzeug. : $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} M_{v_1, \dots, v_d}$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$$

$$x = (x_1, \dots, x_d)$$

Kumulante $C_{v_1, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle_c$
ist definiert durch die

Kumulantenerzeugende $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$\left. \left(\frac{\partial^{v_1} \dots \partial^{v_d}}{\partial \alpha_1^{v_1} \dots \partial \alpha_d^{v_d}} \Gamma(\alpha) \right) \right|_{\alpha=0} = C_{v_1, \dots, v_d} = \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} C_{v_1, \dots, v_d}$$

Eigenschaft:

Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvariable.

(gilt nicht für Momente!)

Beweis: Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$
 $\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2 g(x_1) g(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$

$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle}_{\Gamma(\alpha_1)} + \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle}_{\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha: \Gamma(\alpha, \alpha) = \ln \langle e^{\frac{\alpha(x_1+x_2)}{x}} \rangle = \sum_y \frac{\alpha^y}{y!} \langle (x_1+x_2)^y \rangle_c$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_y \frac{\alpha^y}{y!} \langle x_1^y \rangle_c + \sum_y \frac{\alpha^y}{y!} \langle x_2^y \rangle_c$$

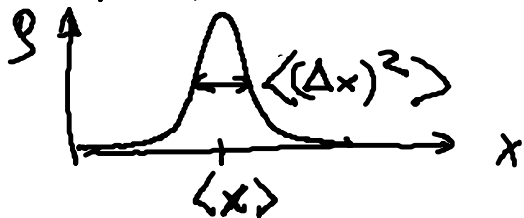
$$\Rightarrow \langle (x_1+x_2)^y \rangle_c = \langle x_1^y \rangle_c + \langle x_2^y \rangle_c$$

Fluktuation $\Delta x := x - \langle x \rangle$

$$\Rightarrow \langle \Delta x \rangle = 0$$

Varianz: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$
 $= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$
 $= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

(Maß für die Breite der Verteilung)



Korrelationsmatrix (Kovarianzmatrix):

$$\langle \Delta x_k \Delta x_l \rangle = \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für unkorrelierte Zufallsvariable!