

Wichtig! Bitte durchlesen, da Prüfungsrelevant.

→ Heute: Gehürzte Fassung

5.) Quantenmechanische Modellsysteme

Grenzen der klassischen Modelle:

→ tiefe Temp.

→ hohe Dichten

⇒ Quantenstatistik

5.1) Ununterscheidbarkeit quantenmechanischer Teilchen

N Teilchenzustand $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle$

$\alpha_1 \rightarrow 1$ -Teilchen Quantenzahlen

Permutations Operator (OP):

$$\hat{P}_{ij} |\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_N\rangle = |\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_N\rangle$$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{vertauscht} \end{array}$

insbesondere gilt: $[A, \hat{P}_{ij}] = 0 \Rightarrow \hat{P}_{ij}$ Erwartungswert

$$\hat{P}_{ij}^2 = 1 \quad (\text{Identität})$$

$$\hat{P}_{ij} \psi \rightarrow \lambda \text{ ist Eigenwert}$$

$$\hat{P}_{ij}^2 \psi = \lambda_{ij}^2 \psi \Rightarrow \lambda_{ij}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{ij} = \pm 1}$$

2 Teilchensystem:

$$\underline{NR}: \hat{P}_{12} |\alpha, b\rangle_S = \frac{1}{2} (\hat{P}_{12} + 1) |\alpha, b\rangle_S$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{P}_{12} + \hat{P}_{12}^2) |\alpha, \beta\rangle_S$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{12} |\alpha, \beta\rangle_S = 1 \cdot |\alpha, \beta\rangle_S$$

Symmetrisch: $|\alpha, \beta\rangle_S := \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \hat{P}_{12}) |\alpha, \beta\rangle_S$

Antisymmetrisch: $|\alpha, \beta\rangle_A := \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \hat{P}_{12}) |\alpha, \beta\rangle_A$

N-Teilchensystem:

$P_{ij} \rightarrow H$ kommutieren

$P_{ij} \rightarrow P_{kl}$ im allg. kommutieren sie nicht

komplizierte Symmetrieeigenschaften sind denkbar,
Tatsächlich sind in der Natur nur Zustände realisiert,
die bei Vertauschung beliebiger ununterscheidbarer
Teilchen symmetrisch ($\lambda_{ij} = +1$) oder
antisymmetrisch ($\lambda_{ij} = -1$) sind

\Rightarrow Reduktion des Hilbertraums $\mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}$ auf
einen sym. (\mathcal{H}_N^+) und einen
antisym. (\mathcal{H}_N^-) Teilraum erlaubter Zustände

	Bosonen	Fermionen
Zustände	Symm.	antisymm.
Spin	ganzzahlig $S = 0, 1, 2, \dots$	halbzahlig $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$
Statistik	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
Hilbertraum	$\mathcal{H}_N^+ = \sum \mathcal{H}_N$ $= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P} \mathcal{H}_N$	$\mathcal{H}_N^- = \hat{A} \mathcal{H}_N$ $= \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{P}} \mathcal{P} \mathcal{H}_N$
Berechnungszahl N_j	$0, 1, 2, \dots$	$0, 1$

Pauli-Prinzip:

- Wellenfkt total antisymm.
- 2 identische Fermionen können sich nicht in
gleichen Ein-Teilchenzustand befinden.

5.2 Das ideale Fermigas (kurz)

1-Teilchenzustände = Eigenzustände zur 1-Teilchen-Energie E_i
 groß ρ kann man sich statutarischer OP:

$$\hat{\rho} = \hat{Z}^{-1} \exp -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N})$$

großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1 \dots N_\ell} \exp \left\{ -\beta \sum_{j=1}^{\ell} (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} \left[\sum_{N_j} \exp -\beta (E_j - \mu) N_j \right]$$

Fermion $\rightarrow 0, 1$

$$t_j = \exp \beta (\mu - \epsilon_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{\ell} \left[\sum_{N_j=0}^1 t_j^{N_j} \right] = \prod_{j=1}^{\ell} [1 + t_j]$$

$$\Rightarrow P(N_1 \dots N_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{t_j^{N_j}}{1 + t_j} = \prod_{j=1}^{\ell} p(N_j) \quad (\text{Verteilung})$$

Mittlere Besetzungszahl im 1-Teilchen Zustand ϵ_j

$$p(N_j) = \exp(\varphi_j - \beta E_j - \alpha N_j)$$

$$\varphi_j = -\ln \Xi_j = -\ln(1 + t_j)$$

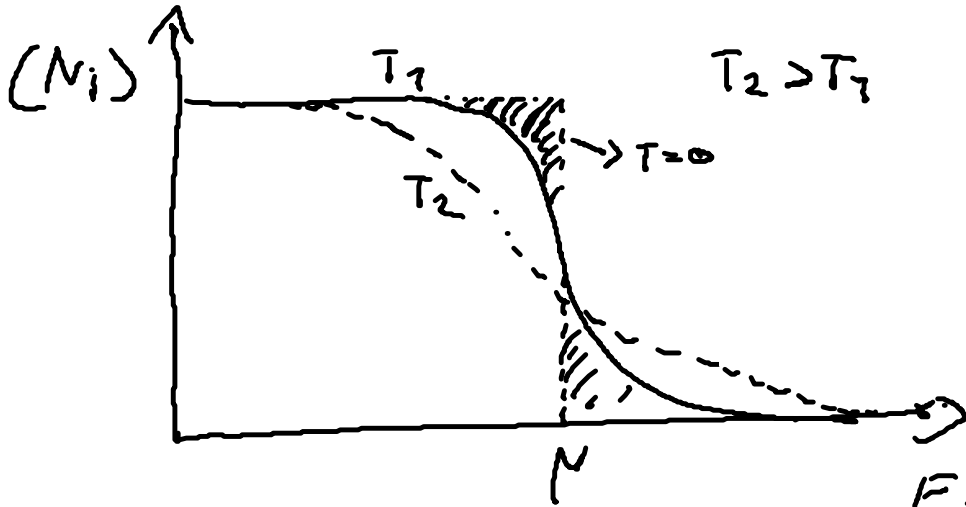
$$\alpha = -\beta \mu + (\mu)$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j$$

$$= \frac{t_j}{1 + t_j} = \frac{1}{t_j^{-1} + 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_j - \mu}{kT}\right) + 1}$$

Fermi-Verteilung



$T \rightarrow 0: \langle N_j \rangle \rightarrow \Theta(\mu - E_j)$ Stufenfunktion

$T > 0$: „Aufweichungszone“ bei $E_j \approx \mu$

$E_j - \mu \gg kT$ (hohe Energien):

$$\langle N_j \rangle \approx \exp\left[-\frac{E_j - \mu}{kT}\right]$$

→ klassischer Grenzfall

→ Maxwell-Boltzmann Verteilung

Energie und Zustandsdichte freier Teilchen

(kurz) Skizze:

- Zylindrisches Potential

- Energieeigenwerte $E_j = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

- großes $V \rightarrow$ Quasi kontinuierlich $\Sigma \rightarrow \left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right) \int d^3k$

- Term für Spin entartung: $(2s+1)$ fach

großkanonische Zustandssumme

$$kT \ln \Xi = kT \sum_j \left[1 + \eta e^{-\beta \epsilon_j} \right]$$

$$\eta = e^{\beta \mu}$$

→ Fugazität

... Integration

→ Fermi-Verteilung

$$\Rightarrow pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U$$

Bemerkung:

1.) Gilt auch für klassische ideale Gase

$$pV = NkT \quad \text{+ kinemisch}$$

$$U = \frac{2}{3} NkT \quad \text{+ kalorisch}$$

2.) Gilt ebenfalls für das Bose-Gas (boson)

→ unabh. von der speziellen Statistik

Ausgelassen: Entartetes Fermigas

Nicht entartetes Fermigas:

Voraussetzung: $\xi_f = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$ d.h. $\mu < 0$

Entwicklung der Fermi-Dirac-Integrale

nach Potenzen von ξ_f (Fugazität)

$$F_s(\nu) = \frac{1}{\Gamma(s+\nu)} \int_0^\infty dy \frac{y^\nu}{e^{y-\xi_f} + 1} \dots$$

$$= e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{s+1}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$



Boltzmann
Limit

Quantenkorrektur

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2\pi m kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_{3/2}(\eta)$$

$$\approx V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

$$N_c := (2s+1) \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad \text{Entartungskonz.}$$

Vollständige Nichtentartung

$$\frac{\bar{N}}{V} \approx N_c e^{\frac{\mu}{kT}}$$

→ Klassische Maxwell-Boltzmann

$$U \approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

→ Näherungen

0. Näherung $\bar{N} = V N_c e^{\frac{\mu}{kT}}$

1. Näherung $\bar{N} = V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - 2^{-5/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$

$$\Rightarrow U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right] \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$$

$$\boxed{U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]}$$

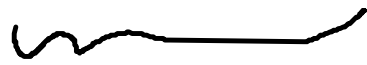
Quantenkorrektur

→ kalorische Zustandsgleichung

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]}$$

→ thermische Zustandsgleichung

$$pV = RT \left[1 + \frac{1}{2} a \frac{M_+}{VN_c(T)} \right]$$



klassische
ideale Gas



Fermi-Abstoßung
(erhöhter Druck)