

5.3 Das ideale Bosegas

Analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen $N_j = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Energie im Zustand } \mathcal{E} \quad E_{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^{\infty} E_j N_j$$

Großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1, N_2, \dots} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$\stackrel{\text{wegen}}{=} \prod_j \left[\sum_{N_j} t_j^{N_j} \right] \quad \text{mit } t_j := \exp \left\{ \beta (\mu - E_j) \right\}$$

$$= \prod_j \underbrace{\frac{1}{1 - t_j}}_{\Xi_j}$$

geometr. Reihe konvergiert genau dann, wenn $t_j < 1$,
also $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahlen N_1, N_2, \dots der 1-Teilchen-Zustände E_1, E_2, \dots zu finden:

$$P(N_1, N_2, \dots) = \Xi^{-1} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$
$$= \prod_j \underbrace{(1 - t_j) t_j^{N_j}}_{= P(N_j)}$$

$$\text{Also } P(N_j) = \underbrace{(1 - \exp \left\{ \beta (\mu - E_j) \right\})}_{e^{-\beta E_j}} \exp \left\{ \beta (\mu - E_j) N_j \right\}$$

Mittlere Besetzungszahl im Zustand E_j

Prüfung: $S = k_B (\ln \Omega - \mathcal{Z}) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_0} = \langle N^0 \rangle, \epsilon_0 = \beta \mu$

$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \epsilon_j} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_j} \ln \bar{\Omega}_j$$

$$\mathcal{Z}_j = -k_B \bar{\Omega}_j$$

$$= - \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_j} \ln (1 - t_j) = \frac{t_j}{1 - t_j} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp \left[\frac{E_j - \mu}{k_B T} \right] - 1}$$

Bose-Verteilung

(folgt auch explicit aus $\langle N_j \rangle = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j P(N_j)$)

NB: $t_j \frac{d}{dt_j} t_j^{N_j} = t_j N_j t_j^{N_j-1} = N_j t_j^{N_j}$

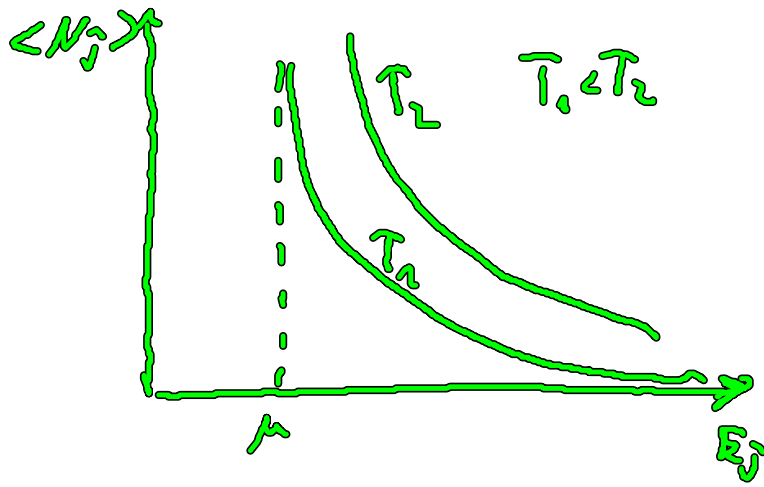
$$= \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j (1 - t_j) t_j^{N_j}$$

$$\Rightarrow = (1 - t_j) t_j \frac{d}{dt_j} \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j}$$

$$= (1 - t_j) t_j \frac{d}{dt_j} \left(\frac{1}{1 - t_j} \right)$$

$$= (1 - t_j) t_j \frac{1}{(1 - t_j)^2}$$

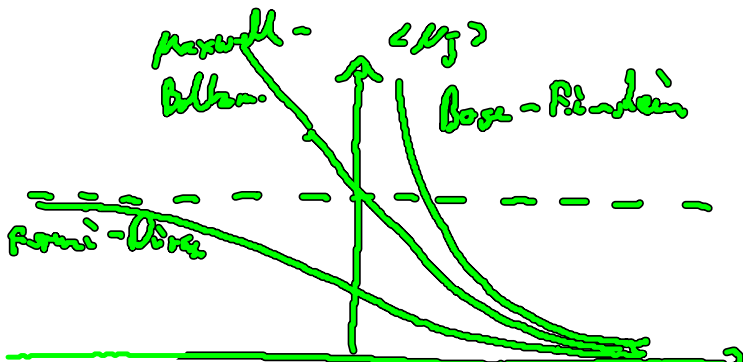
Standard
Reihe



divergiert für $E_j \rightarrow \mu$
(Zustandsumme divergiert)

Vergleich aller 3 Verteilungen

$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{2T}\right] - \xi}$ mit $\xi = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltz.} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$



Für hohe Energien
 $(E_j - \mu) / 2T \gg 1$
 fallen alle 3 Verteilungen
 zusammen!

Übung zum Quasikontinuum der Zustände $E_j = \frac{p^2}{2m}$:

$\ln \Xi = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln(1 - \xi e^{-\beta E_j})$ ($\xi = e^{\beta \mu}$ Fugazität)

$\approx - (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln [1 - \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]$

part. Int. $= - (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \underbrace{\frac{p^3}{3} \ln [1 - \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]}_{\rightarrow 0} - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p}{2m} \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 - \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}} \right\}$

$= \frac{2}{3} \beta (2s+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$

$= \frac{2}{3} \beta U$

$\Rightarrow \boxed{pV = 2T \ln \Xi = \frac{2}{3} U}$ wie für Fermigas

Vertikales Bosegas (quasi-klassisch, nichtentartet, fest)

fall)

(NB: Entartetes Bosegas keine Poldk zum nicht wie im Fermi-Fall behandelt werden, da die Zustatsdichte $\propto \epsilon^s$ für $\epsilon_j \leq \mu$ divergiert!!)

Entwicklung nach Potenzen von $\boxed{\xi = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1}$ d.h. $\mu < 0$

Gesamte Teilchenzahl:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2s+1) \frac{\epsilon_0 V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\left\{\frac{p^2}{2m} - \mu\right\} kT} - 1} \\ &\quad \left(y = \frac{p^2}{2m kT} \right) \\ &= \frac{2s+1}{2} \frac{\epsilon_0 V}{h^3} (2m kT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{e^{y-\xi} - 1} \\ &= \frac{2s+1}{2} \frac{\epsilon_0 V}{h^3} (2m kT)^{3/2} \int_0^\infty y^2 \frac{\xi e^{-y}}{1 - \xi e^{-y}} \\ &\approx \underbrace{\int_0^\infty dy y^2 e^{-y}}_{= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} + \underbrace{\int_0^\infty dy y^2 e^{-2y} \dots}_{= \frac{1}{2^{3/2}} \sqrt{\pi}} \dots \end{aligned}$$

$$\bar{N} \approx V \underbrace{\frac{2s+1}{\lambda^3}}_{\xi} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 + \underbrace{\frac{1}{2^{3/2}} e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\xi} \right] \quad \text{mit} \quad d := \left(\frac{h^3}{2\pi m kT} \right)^{3/2} = \left(\frac{2s+1}{\lambda_c} \right)^{3/2}$$

Elimination von μ durch \bar{N} :

0. Näherung: $\bar{N} = V \frac{2s+1}{\lambda^3} \int \Rightarrow \mu = \dots ?$

1. Näherung: $\bar{N} = V \frac{2s+1}{\lambda^3} \int \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{v(2s+1)} \right]$

$\Rightarrow \int = e^{\frac{\mu}{kT}} \approx \frac{\bar{N} \lambda^3}{v(2s+1)} \left[1 - \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{v(2s+1)} \right]$

Inner Energie: $U = (2s+1) \frac{4\pi v}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \langle \mu(p) \rangle E(p)$

$= (2s+1) \frac{4\pi v}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\epsilon^4}{\exp\left[\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right] - 1}$

$= \frac{2s+1}{2} \frac{4\pi v}{h^3} (2\pi kT)^{\frac{3}{2}} kT \int_0^\infty dy y^{\frac{3}{2}} \frac{5e^{-y}}{1 - 5e^{-y}}$

$\approx \int_0^\infty \int_0^\infty dy y^{\frac{3}{2}} e^{-y} + \int_0^\infty \int_0^\infty dy y^{\frac{3}{2}} e^{-2y}$

$= \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \quad \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$

$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2s+1}{\lambda^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 + \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$

$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \frac{\lambda^3}{v(2s+1)} \bar{N} \right]$

Exakte Zustandsgleichung

↑
Quantenkorrektur

$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \frac{\lambda^3}{v(2s+1)} \bar{N} \right]$

↑
Exakte Zustandsgleichung

Dose-Ansicht: erniedrigt Druck

Bose-Einstein-Kondensation (f. Kerr. Einstein: 1925
Exp. Ketterle & Grimm '95
Nobelpreis 2001)

Grundzustand des Bose-Gas $E_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0 \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1 - z} \quad \text{mit Fugazität } z = e^{\beta \mu}$$

Die mittlere Besetzungszahl dieses Quantenzustands kann unendlich
groß werden für $z \approx 1$,
d.h. $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$ (alle Teilchen im fundamentalen Zustand)

allgemein: fund. Zust. alle anderen Zust.

$$\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N' \quad \text{mit } N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$$

(i) $z \ll 1$ (normale Phase): $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar
 \Rightarrow verdünntes Bose-Gas

(ii) $z \approx 1$ (besetzte Phase):

$$N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \approx \bar{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{N'}{V} &\stackrel{\text{Boltz.}}{\approx} 2(S+1) \frac{2\pi}{h^2} (2\pi m kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dy \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^y - 1} \\ &\approx 2(S+1) \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y} \end{aligned}$$

die normale Komponente verhält sich wie ein verdünntes

Bose-Gas.

$$\frac{N'}{V} = \frac{2S+1}{\lambda^3} \sim T^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \quad T_c \text{ definiert durch } \int \approx \frac{\bar{N}}{V} \frac{\lambda(T_c)^3}{2S+1} = 1$$

$$\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N' \Rightarrow \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = 1 - \frac{N'}{\bar{N}}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$



Gebiet der Bose-Einstein-Kond.

(2-3-polares Gas: normal + 2 orthogonale Komponenten)

Ordnung wird nur durch normale Komp. bestimmt.