

## 4.3 Diffusion

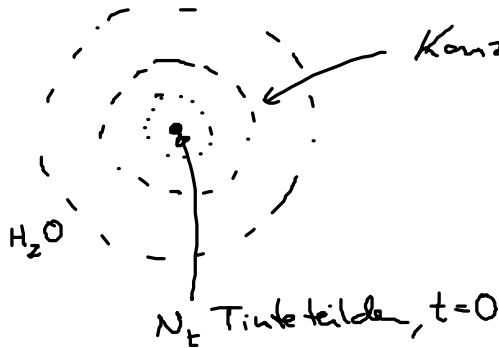
### 4.3.1 Transport in Zellen?

- Diffusion anwendbar auf Kolloide  
Tinte-Moleküle } in  $H_2O$   
kleine " }  $\rightarrow$  Bsp:  $D \approx 10^{-9} \frac{m^2}{s} = 1 \frac{\mu m^2}{ms}$

Messung von  $D$ ?

(i) Beobachtung einzelner Teilchen

(ii)



$$c(z,t) = N_t P(z,t) \quad (4.18)$$

$$\rightarrow 6Dt = \frac{1}{N_t} \int z^2 c(z,t) d^3x$$

Bsp:

Bakterium:  $R = 1 \mu m$   
menschl. Zelle:  $R = 10 \mu m$



$N_t$  Zuckermolek.

$$t = \frac{R^2}{6D} = \begin{cases} 0,2 \text{ ms} \\ 20 \text{ ms} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Mikrom-Bereich: Diffusion schnell (Bsp. Bakterium)  
darüber: andere Transportmechanismen (Bsp. Mikrotubuli)  
Bsp: Nervenzelle: bis zu  $1m \frac{00}{00}$

amb. Gitter

### 4.3.2 Diffusionsgleichung

• 2.  $P(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 P(x-b_i, t-\Delta t)$

Taylor:  $P(x,t) - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - \underbrace{b_i \cdot \nabla P}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{i\alpha} b_{i\beta}}_{\substack{\text{wegen } \sum_i b_i = 0 \\ |b_i| = L}} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$

$\frac{1}{2} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} \stackrel{!}{=} \frac{1}{d} L^2 \delta_{\alpha\beta}$

(i)  $= \tilde{c} \delta_{\alpha\beta}$

(ii) Spur:  $\alpha = \beta$   
 $\frac{1}{2} \sum_i b_i^2 = L^2 = d \tilde{c} \rightarrow \tilde{c} = \frac{L^2}{d}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} - D \nabla^2 P = 0} \quad (4.19)$

$D \stackrel{!}{=} \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t}$

... Diffusionsgleichung  
 vgl. (4.2)

• phänomenolog. Herleitung:

(i) Erhaltung der Teilchenzahl:

$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } j = 0} \quad (4.20)$

Teilchenzahl-Stromdichte

(ii) Materialgesetz:

$\boxed{j = -D \nabla c} \quad (4.21)$

... 1. Ficksches Gesetz

(Strom versucht  $\nabla c$  auszugleichen)

(ii) in (i)

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c = 0} \quad (4.22)$

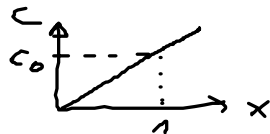
... 2. Ficksches Gesetz

D... Materialparameter, mikroskop. Ausdruck (4.19)

• Lösungen:

(i)  $c(x,t) = c_0 \hat{=}$  thermodynam. GG

(ii) 1D:  $c(x,t) = c_0 x$  ... stationäres Profil



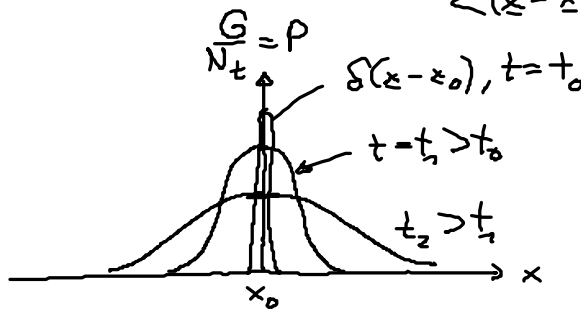
(iii) Green'sche Fkt.:  $G(x-x_0, t-t_0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D \nabla^2\right) G(x-x_0, t-t_0) = N_t \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) \quad (4.23)$$

o.B. → [Übung]

$$G(x-x_0, t-t_0) = \frac{N_t}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right] \quad (4.24)$$

... Gaußsche Verteilung  
 $\langle (x-x_0)^2 \rangle = 6 D(t-t_0)$  ∞ ∞ ∞



ideale Polymerkette:  $z \sim N$  End-zu-End-Vektor  $z \dots$  Gaußsche Verteilung  
 Anzahl der Monomere

Bem: (i) Diffusion  $\equiv$  Zufallsprozess  $\leftrightarrow$  (4.22)  $\hat{=}$  deterministisches Gesetz für  $c(x,t) \sim P(x,t)$

statistische Fluktuationen:  $c(x,t) - c_{\text{real}}(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{N_t}} \rightarrow 0, N_t \rightarrow \infty$   
 ... thermodynam. Limes

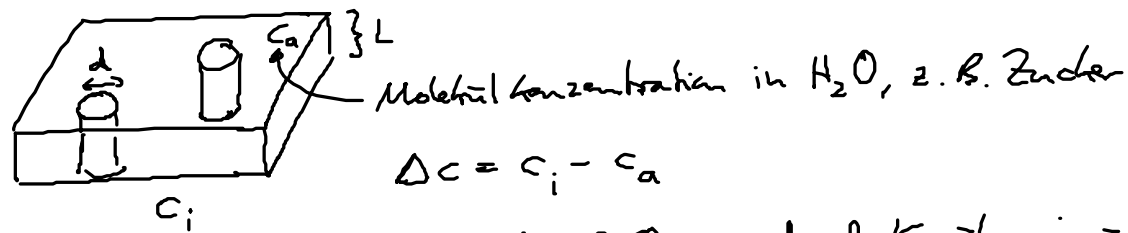
(ii) Gaußsche Verteilung: gültig für  $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0, L \rightarrow 0$   
 so daß:  $t = N \Delta t, D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t} = \frac{1}{2d} \frac{NL^2}{t}$  endlich

## 4.4. Diffusion in der Biologie

### 4.4.1 Durchlässigkeit (Permeabilität) von künstl. Membranen

• Membran-Modell

(i) passive Kanäle/Poren:



$$\Delta c = c_i - c_a$$

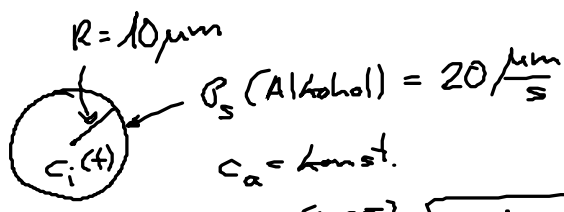
$L \gg d \rightarrow$  stationäre 1D-Diffusion durch Kanäle:  $j_k = -D \frac{\Delta c}{L}$   
 mit  $\alpha \dots$  Flächenanteil der Poren:

$$j_m = -P_s \Delta c \quad (4.25)$$

$$P_s = \alpha \frac{D}{L} \dots$$

Permeabilität der Membran für "solute"

Bsp: Zelle

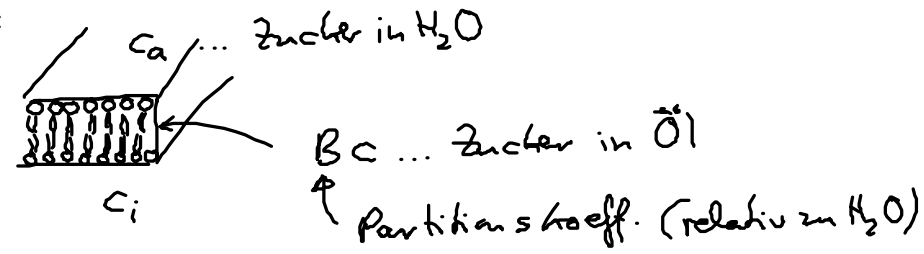


$$\frac{dV \Delta c}{dt} = j_m A \xrightarrow{(4.25)} \frac{d \Delta c}{dt} = - \left( \frac{A P_s}{V} \right) \Delta c \quad (4.26)$$

$$\Delta c = \Delta c(0) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{V}{A P_s}$$

hier:  $\tau = 0.2 \text{ s} !!$

(ii) keine Poren:



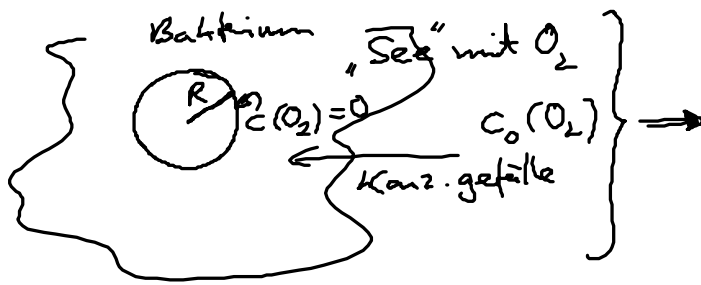
$$j_m = -P_s \Delta c$$

$$P_s = \frac{B D}{L}$$

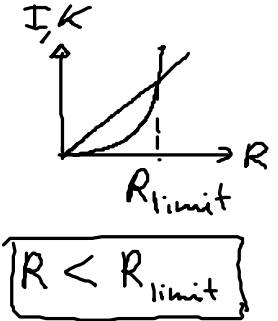
Bsp: Glukose:  $P_s = 10^{-3} \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$   
 $\text{Na}^+, \text{Cl}^-$ :  $P_s = 1-100 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$

Zellen:  $P_s$  viel größer  
 $\rightarrow$  weitere Mechanismen

## 4.4.2 Bakterieller Metabolismus



möglicher  $O_2$ -Konsum pro Zeit:  
 $I = 4\pi D R c_0(O_2)$  (4.28)  
 tatsächlicher  $O_2$ -Konsum  
 $K \sim R^3$



## 4.4.3 Nernst-Relation $\leftrightarrow$ Membran Potentiale

$|\mathbf{E}| = \frac{\Delta V}{d} \rightarrow$  elektrophoretischer Fluß  $\hat{=}$  Elektrolyt-Leitung

Elektrolyt

$$j_e = c \cdot v_d = \frac{c q}{\gamma_e} E \quad (4.29)$$

Ionen-  
konz.
Diff-  
geschw
Reibungs-  
koeff.

& inhomog.  $c$  & ... Einstein ( $D = \frac{k_B T}{\gamma}$ )

$$\Rightarrow j = j_D + j_e = D \left( -\nabla + \frac{q}{k_B T} E \right) c \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

• Gleichgewicht:  $j = 0 \dots E \leftrightarrow$  inhomog.  $c$

$$\frac{1}{c} \nabla c = \frac{q}{k_B T} E \quad \left| \int_1^2 \dots \cdot d\xi \right.$$

Linienintegral:  $\Delta V_{eq} = - \int E \cdot d\xi \dots$  Potential-differenz

$$\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = - \frac{q}{k_B T} \Delta V_{eq} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

1D:  $c_2 = c_{\text{oben}}, c_1 = c_{\text{unten}}$