4.4.3 Nernst-Relation $\longleftrightarrow$ Membran-Potentiale

- Ströme im Elektrolyt:

$$\boxed{j = j_D + j_e = D\left(-\nabla + \frac{q}{k_B T} E\right) c} \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

- Gleichgewicht: $j = 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = -\frac{q}{k_B T}\,\Delta V_{eq}} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

Bem.: (i) (4.31) gültig für kleine c $\hat{=}$ Ww zwischen Ionen vernachlässigbar

(ii) $\oplus$ näher bei neg. Elektr.
$\ominus$ näher bei pos. "

(iii) $e^{(4.31)} \longrightarrow \quad \boxed{\frac{c_2}{c_1} = e^{-\frac{q\,\Delta V_{eq}}{k_B T}}} \quad (4.32)$

... Boltzmann-Faktor !!
kontrolliert GG-Verteilung (kein D, da D dynam. Größe)

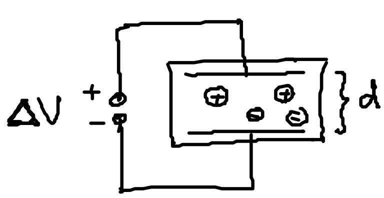
(iv) Bsp: Na^+
$q = e > 0$, $\frac{c_{oben}}{c_{unten}} = 0.1$ $\quad \boxed{k_B T_r = \frac{1}{40}\,eV}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta V_{eq} = 62\,mV}$$

$\hat{=}$ Membran-Potential
(aber: im Nicht-GG)

4.4.4 Elektr. Widerstand $\longleftrightarrow$ Dissipation

- Elektrolyt-Zelle:



$$\boxed{\begin{aligned} j_L &= q\, j_e \overset{(4.29)}{=} \sigma E \\ \sigma &= \frac{c q^2}{\gamma} = \frac{D q^2 c}{k_B T} \end{aligned}} \quad (4.33)$$

... Leitfähigkeit

$$1D: \quad \left.\begin{array}{l}\Delta V = E d \\ \text{Strom: } I_{ion} = j_\perp A\end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l}\Delta V = R\, I_{ion} \\ R = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{A}\end{array}} \quad (4.34)$$

... Ohmsches Gesetz für jede Ionensorte

... elektr. Widerstand

• Merke: Erhaltungsgröße & ungeordnete Bewegung

$\longrightarrow$ diffuses Transportgesetz

(i) Teilchendiffusion: $\underline{j} = -D \underline{\nabla} c$ (4.35)

(ii) Energieerhaltung $\longrightarrow$

Wärmetransport: $\underline{j}_Q = -\varkappa \underline{\nabla} T$ $\quad \varkappa$ ... Wärmeleitfähigkeit

$$\ldots \longrightarrow \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \varkappa \underline{\nabla}^2 T = 0$$

5. Hydrodynamik in der Nanowelt

• Bio-Frage: Warum bewegen sich Bakterien anders fort als Fische?

Physikal. Idee: Reibung dominiert in der Nanowelt

5.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

• zentrale Grundgleichung für Geschw. feld $\underline{v}(\underline{x},t)$ einer viskosen, isotropen = Newtonsche Flüssigkeit

5.1.1 Grundgleichung

• Beschränkung: inkompressible Flüssigkeiten: $\quad \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (5.1)$

Herleitung: Massenerhaltung differentiell: $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\underbrace{\rho \underline{v}}_{\text{Massenstromdichte}}) = 0 \quad (5.2)$

$$\text{mit} \quad \underbrace{\frac{d\rho(\underline{x},t)}{dt}}_{\substack{\text{totale/materielle/substantielle} \\ \text{Zeitableitung}}} = \frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} + \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \rho(\underline{x},t)}_{\substack{\text{konvektive} \\ \text{Zeitableitung}}} \quad (5.3)$$

$$(5.2) \longrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{inkompressibel: } \frac{d\rho}{dt} = 0 \longrightarrow (5.1)$$

• Navier-Stokes-Gl.: (= Newtonsche Grdgl.)

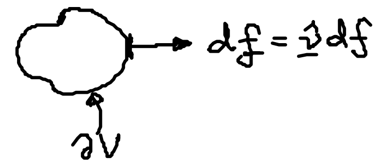
$$\underbrace{\rho\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla v\right)}_{\frac{dv}{dt}}}_{\text{Trägheit}} = -\nabla \underset{\text{Druck}}{p} + \underbrace{\eta\,\nabla^2 v}_{\text{Reibung!}} + \underset{\text{Volumenkraftdichte}}{\rho\, b}$$

η ... Scherviskosität

Bsp: $b = g$ ... Gravitation, elektr./magn. Ww

• Umschreibung: Spannungstensor $\underline{T}$, in Komp. T_{ij}

→ Oberflächenkraft auf Flüssigkeitsvolumen:



$$\boxed{F_{0i} = \int_{\partial V} T_{ij}\, df_j \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \nabla_j T_{ij}\, d^3x = \int_V (\operatorname{div}\underline{T})_i\, d^3x} \quad (5.5)$$

o.B.: $$\boxed{T_{ij} = \underbrace{-p\,\delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)}} \quad (5.6)$$

(1) $F_0 = -\int p\, df$, $p\,df \parallel df$! ... keine Schubspannungen ($\perp df$)

$\quad = -\int \nabla p\, d^3x$

(2) Newtonsche Flüssigkeit:

dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ ... Scherrate (5.7)

(i) $2\eta A_{ij}$ ... für isotrope Flüssigkeiten

(ii) $W_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) \longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}$

$\longrightarrow \omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v$

Vortex!
kein Beitrag zur Dissipation!!

mit $\nabla_j T_{ij} \underset{(5.6)}{\overset{(5.7)}{=}} \eta \nabla_j(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \underset{\operatorname{div} v = 0}{\overset{\nabla_i v_i =}{=}} \eta \nabla^2 v_i$

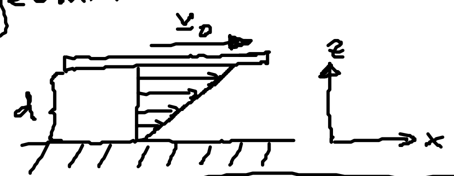
$$\Longrightarrow \boxed{\rho \frac{dv}{dt} = \operatorname{div}\underline{T} + \rho\, b} \quad (5.9)$$

• $v\cdot\nabla v$ ... Nichtlinearität ⟶ Chaos, Turbulenz

$\quad = v_i \nabla_i v$

5.1.2 Stationäre Lösungen

- Schergeometrie:



$$\left.\begin{array}{l} \underline{b}=0 \\ p=p_0 \end{array}\right\} \xrightarrow{(5.4)} \boxed{\underline{v} = v(z)\underline{e}_x = v_0 \frac{z}{d}\underline{e}_x} \quad (5.10)$$

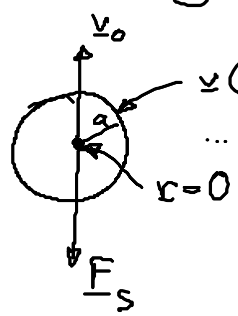
$$\longrightarrow \boxed{T_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d}} \quad (5.11)$$

$\frac{F}{A}$

$\longrightarrow$ Messe η!

- Stokessche Reibung: (1) Translation $\longrightarrow$ Einstein: N_A
  $\longrightarrow$ Millikan: e

$\underline{v}(\infty) = \underline{0}$
$p(\infty) = 0$



$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{v}_0$
... „vollständige Haftung"

(1) $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$
(2) $\underline{b} = 0$
(3) Annahme: $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \ll -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}$

$$\xRightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{array}{l} v_i(\underline{r}) = \left[\frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1 - 3\frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right] v_{0j} \\ p(\underline{r}) = \frac{3}{2}\eta \frac{a}{r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{v}_0 \end{array}}$$

$\Longrightarrow$ Stokessche Reibungskraft auf Kugel:

$$\boxed{\underline{F}_S = \int_{\partial V_K} \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -6\pi\eta a \underline{v}_0} \quad (5.13)$$

$\longrightarrow$ Messe η!

(2) Rotation:

$\underline{v}(\infty) = 0$

$\underline{v}(\underline{r}_K) = \underline{\omega}\times\underline{r}_K$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{v} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\omega}\times\underline{r} \\ p = \text{konstant} \end{array}} \quad (5.14)$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\Gamma} = \int_{\partial V_K} \underline{r}_K \times \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \underline{\omega}} \quad (5.15)$$

... viskose Drehmoment

5.1.3 laminar $\longleftrightarrow$ turbulenter Fluß

- zähe Flüssigk. sind schwer zu mischen:

Beobachtung: (1) Fluß stoppt sofort bei $\underline{F}, \underline{T} = 0 \rightarrow$ Trägheit unwichtig

(2) $\left.\begin{array}{l}\underline{T} \rightarrow -\underline{T} \\ \underline{F} \rightarrow -\underline{F}\end{array}\right\}$ Ausgangszustand

(3) Reibung, Dissipation $\longleftrightarrow$ Reversibilität? (2. HS ↯!)

nein: Zeitskala: Diffusion $\gg$ Fluß

(4) laminarer Fluß (Trägheit $\ll$ Reibung)

Flüssigkeitsschichten gleiten übereinander

Turbulenz (Trägheit $\gg$ Reibung): wenig viskose Flüssigk.

Kaffeetasse

komplexe Strömungsmuster

$\Longrightarrow$ Kriterien? Dimensionsanalyse!