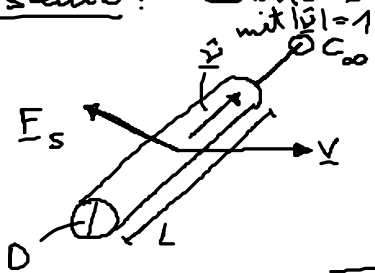


5.3 Biologische Anwendungen

5.3.1 Fortbewegung/Transport ($Re < 1$)

• Einsub: Stokes'sche Reibung eines Zylinders



$\frac{L}{D}$... Aspektverhältnis

i.a. $F^s \propto v$: $F_i^s = \gamma_{ij} v_j$ (5.24)

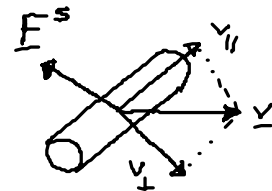
γ_{ij} ... Reibungstensor

hier: invariant unter c_∞ & Spiegelungen

$$\Rightarrow \gamma_{ij} = \underbrace{\gamma_{||}}_{F^s, v \parallel \hat{v}} \hat{v}_i \hat{v}_j + \underbrace{\gamma_{\perp}}_{F^s, v \perp \hat{v}} (\delta_{ij} - \hat{v}_i \hat{v}_j) \hat{=} \begin{pmatrix} \gamma_{\perp} & 0 \\ 0 & \gamma_{||} \end{pmatrix}$$

Bsp: $\gamma_{||} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } \frac{L}{D} \approx 20 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{L}{D} \rightarrow \infty \end{cases}$

$\gamma_{\perp} > \gamma_{||}$ \Rightarrow



• Bewegungsformen:

(1) flexible Wimpern/Zilien: (mit Filamenten & Motoren)
 $L = 5-10 \mu\text{m}$, $D \approx 200 \text{nm}$

↙
 Fortbewegung
 von Zellen

↘
 fest verankert
 Transport von
 Flüssigkeit

(2) Bakteriellcs Flagellum $\hat{=}$ starrer, helikaler „Stab“ ($\hat{=}$ Propeller für $Re < 1$)

Rotation \rightarrow Translation: Erklärung

abstrakt: $F^s \leftrightarrow \omega$?

lineare Beziehung: $F_s = \underline{f} v + \underline{C} \omega$ (5.25)

\rightarrow Transformationsverhalten unter Inversion (Punktspiegelung) ($R_{ij} = -\delta_{ij}$)

polare Vektoren: $F_s, v \rightarrow -F_s, -v$
 \rightarrow Tensoren: $\underline{f} \rightarrow \underline{f}$
 (2. Stufe) $[f'_{ij} = R_{ii} R_{jj} f'_{ij}]$
 axialer Vektor: $\omega \rightarrow \omega$

$\underline{C} \rightarrow -\underline{C}$
 Pseudotensor

Bsp: $\underline{C} = C \mathbf{1}$

C... Pseudoskalar: $C = \pm 1$
 für Rechts-/Linksschraube
 eines chiralen Objekts

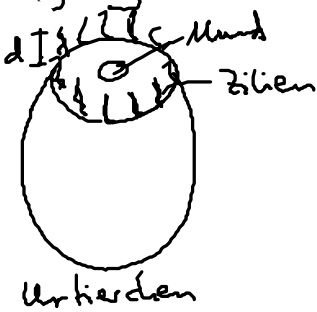
Historie: Berg/Anderson (1973): erste Erklärung (\rightarrow erster Rotationsmotor!)
 Bestätigung: $d(\text{Flagellum}) \approx 20 \text{ nm} \rightarrow$ Beobachtung?
 Silvermann/Siman:



\Rightarrow Rotationsmotor: Juwel der Nanotechnologie

• Beispiele:

(1) Bewegung \leftrightarrow Ruhe für Nahrungsaufnahme:



Zeitskalen:

Beweg: $\frac{d}{v} = t_B$
 Diffusion: $\frac{d^2}{D} = t_D$

$Pe = \frac{t_D}{t_B} = \frac{vd}{D}$

Peclet-Zahl

(5.27)

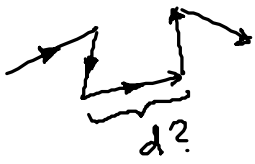
$\gg 1$, Bewegungsdominiert
 $\ll 1$, Diffusionsdominiert

Bewegung für $\frac{d}{v} < \frac{d^2}{D} \Rightarrow \boxed{v > \frac{D}{d}}$ (5.28)

Bsp: $d = 1 \mu\text{m}$, $D = 1 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}} \rightarrow v_0 = \frac{D}{d} = 1000 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$

$$\left. \begin{array}{l} v(\text{Zilie}) \\ v(\text{Bakt.}) \end{array} \right\} < v_0 !!!$$

(2) E. coli: Zufallsweg mit Drift \rightarrow pos. Nahrungsgradient \leftrightarrow Diffusion

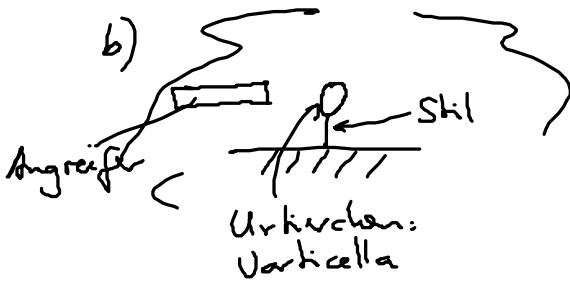


$$\left. \begin{array}{l} v \approx 30 \mu\text{m/s} \\ D \approx 1 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}} \end{array} \right\} \xrightarrow{(5.28)} d > \frac{D}{v} \approx 30 \mu\text{m}$$

(3) $Re < 1$



$$\left. \begin{array}{l} a \rightarrow 12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ Re \rightarrow 500 \end{array} \right\} \text{jenseits laminaren Flusses}$$



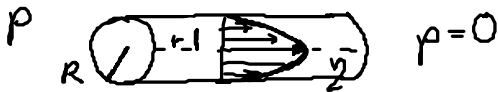
$Re < 1$: Angreifer wird mitgezogen

\Rightarrow schnelle Kontraktion von $0,2-0,33 \text{mm} \xrightarrow{v \approx 80 \text{mm/s}} 0,1-0,16 \text{mm}$

$\hat{=}$ Spasmodeme (schnellste Kontraktion im Tierreich)

5.3.2 Gefäßnetzwerke

- Gefäß-Netzwerke \leftrightarrow $\left. \begin{array}{l} \text{Abfallbeseitigung} \\ \text{Belieferung} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Blut} \\ \text{Luft} \\ \text{Lymphe} \end{array} \right\}$ hierarchische Verzweigungsstruktur
 - Model: zylindrische Poiseuille-Strömung
- Bsp: Aorta - Arterien ... Kapillargefäße



$$NS \rightarrow \boxed{v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4L\eta} p} \quad (5.29)$$

... parabol. Geschw. profil
(gültig auch für $Re > 1$, so lange laminar, $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = 0!!$)

Ausflußrate
[$\frac{m^3}{s}$]

$$\boxed{Q = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi R^4}{8L\eta} p} \quad (5.30)$$

... Hagen-Poiseuille-Gesetz für laminaren Fluß
→ alle Gefäße bis auf große Venen/Arterien

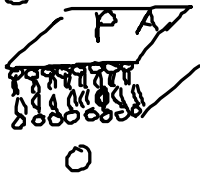


• (5.30) → $\boxed{Q = \frac{1}{Z} p, \quad Z = \frac{8L\eta}{\pi R^4}} \quad (5.31)$... hydrodynamischer Widerstand

allg: Gesetz von Darcy!

• $Z \propto \frac{1}{R^4} \rightarrow$ Blutflußregulation durch kleine Dilatationen/Kontraktionen
Bsp: $\frac{p}{Q} = Z \rightarrow Z' = 1,3Z \rightarrow \frac{R'}{R} = 0,94 \approx 6\%$

• Bsp: für Darcy:



→ $Z = \frac{1}{ALp}$ Lp ... "Filtrationskoeffizient"