12. Nerven Impulse

12.1 Phänomenologie

12.2. Zell-Membran als elektr. Netzwerk: Telegraphen-Gl.

- passive/ohmsche Membran
- Membranstück: Fläche A

(i) eine Ionenspezies: ⟶ Widerstand $R_i = \frac{1}{g_i A}$

Strom $I_i = j_{g_i} A$

Nernst-Sp.: V_i^N

} Ersatzschaltbild

(ii) mehrere Ionenspezien: Ersatzschaltbild

vernachlässige Ionenpumpen: V^0 ... Membran-Pot. kurz nach Abschalten der Ionenpumpen

Rel.zeit (Donnan-GG) ≫ Ausbreitungszeit (Nerven Impulse)

V^0 ? $\sum_i j_i = 0 \longrightarrow \sum_i g_i (V^0 - V_i^N) = 0$

Ladungs-neutralität

$$\longrightarrow \boxed{V^0 = \sum_i \frac{g_i}{g_{tot}} V_i^N \ , \ g_{tot} = \sum_i g_i} \quad (12.1)$$

Werte (Tabelle 11.1) ⟶ $V^0 \approx -67\,mV$

$g_{tot} \approx 5 \frac{1}{\Omega m^2}$

vgl. Ruhepotential: $-72\,mV$ mit expliziten Pumpstrom ⟶ Einfluß der Pumpströme auf V^0 klein

(iii) Kapazität: $C = A C_0$, $C_0 \approx 10^{-2} \frac{F}{m^2} \approx \frac{1\mu F}{cm^2}$ ... Membranparameter

$$Q = CV \longrightarrow I = C \frac{dV}{dt} \quad (12.1b)$$

• Stromfluß entlang Membran: = Serienschaltung von Zylindern

(i) Strom durch Membran: $0 \neq \frac{I_{tot}}{A} = \sum_i j_{q,i} = \sum_i g_i (\Delta V - V_i^N)$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta V = V^0 + I_{tot} R_r \quad , \quad R_r = \frac{1}{g_{tot} A}} \quad (12.2)$$

(ii) Ersatzschaltbild: (1) $\varkappa$ ... elektr. Leitfähigkeit des Axonplasmas

$$\longrightarrow dR_x = \frac{1}{\varkappa} \frac{dx}{\pi a^2} \quad (12.3) \quad a \text{ .. Axon-Radius}$$

(2) $dR_x' \approx 0$

$$\longrightarrow V_1 = const = 0$$

$$V_2 = V(x) = \Delta V = V_2 - V_1$$

(iii) Telegraphen-Gleichung für Membran-Potential:

$$-\left(I(x+dx) - I_x(x)\right) = -\frac{dI_x}{dx} dx \overset{!}{=} 2\pi a \left[j_{qr}(x) + C_0 \frac{dV}{dt}\right] dx$$

$$\& \quad I_x(x) = -\frac{\pi a^2 \varkappa}{dx} \left[V(x + \tfrac{1}{2}dx) - V(x - \tfrac{1}{2}dx)\right] = -\pi a^2 \varkappa \frac{dV}{dx}$$

$$\longrightarrow \boxed{\pi a^2 \varkappa \frac{d^2 V}{dx^2} = 2\pi a \left(j_{qr} + C_0 \frac{dV}{dt}\right)} \quad (12.4) \text{ ... Telegraphen-Gl.}$$

(iv) Ohm: $j_{qr} \overset{(12.2)}{=} g_{tot} (V - V^0) = g_{tot} \underbrace{v(x,t)}_{\text{reduziertes Membranpotential}}$

Skalierung!

$$(12.5) \begin{cases} \lambda_{Axon} = \sqrt{\dfrac{a \varkappa}{2 g_{tot}}} & \text{... charakt. Länge} \\ \tau = \dfrac{C_0}{g_{tot}} & \text{... charakt. Zeit} \end{cases} \quad \xrightarrow{(12.4)}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\lambda_{Axon}^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - \tau \frac{dv}{dt} = v} \qquad (12.6)$$

... lineare Telegraphen Gl.

(v) <u>Lösung</u>: mit $v(x,t) = e^{-\frac{t}{\tau}} w(x,t)$

$$\xrightarrow{(12.6)} \quad \boxed{\frac{\lambda_{Axon}^2}{\tau} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{dw}{dt}} \qquad (12.7)$$

... Diffusionsgleichung

$t = 0$ ... δ-Impuls $\longrightarrow$ $v(x,t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t} \frac{\tau}{\lambda_{Axon}^2}}$

... <u>kein</u> fortschreitender Impuls!!

Werte: $a = 0.5\,mm$ $\quad C_0 = 10^{-2} \frac{F}{m^2}$
$g_{tot} = 15 \frac{1}{\Omega m^2}$ $\quad \varkappa = 3 \frac{1}{\Omega m}$

$$\left.\right\} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \lambda_{Axon} \approx 12\,mm & \to \text{„Diffusionslänge"} \\ \tau \approx 2\,ms & \to \text{„Zerfallszeit"} \end{array}}$$

$\longrightarrow$ Elektrotonus ✓
$\longrightarrow$ kein Aktionspotential $\quad \mathrm{O}_0 \longrightarrow$ Kopplung: $V_0 \longleftrightarrow v$!!
$\longrightarrow$ kein Pulstransport

12.3 <u>Aktionspotential: vereinfachter Mechanismus</u>

- Aktionspotential: (i) ab Schwellwert-Stimuli
  (ii) fortlaufender Impuls
  (iii) <u>keine</u> Dämpfung

  } System im Nicht-GG $\to \Delta F \to$ nützliche Arbeit & Dissipation

12.3.1 <u>Mechan. Analogon</u>

- schwere, elast. Kette im Wellblechpotential

- Kinke = Soliton:
  Rate für ΔU: $\vartheta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Massedichte}}}{\rho^{(1D)}} g\, \Delta h = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reibungskoeff.}}}{\gamma} \vartheta^2$ ... dissipierte Energie (12.8)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vartheta = \frac{S^{(10)} g \, \Delta h}{\gamma^2}} \quad (12.9)$$

- Doppelkinke: $\longrightarrow$ Schwellkraft: $F > F_s$

$\Longrightarrow$ kont. gespeicherte Energie, Dissipation } anregbares Medium

12.3.2 Geschichte

$\boxed{\text{Erinnerung: } V^0 = \sum_i \frac{g_i}{g_{tot}} V_i^N}$

$\longrightarrow$ Ionenleitfähigkeiten ändern sich mit $\Delta V = V$

ruhende Membran: $g_{K^+} \approx 25\, g_{Na^+} \approx 2 g_{Cl^-} \longrightarrow V \to V_{K^+}^N$

Membran beim Maximum des Aktionspotentials: $g_{K^+} \approx 0.05\, g_{Na^+} \approx 2 g_{Cl^-} \longrightarrow V \to V_{Na^+}^N$

- Erklärung?

12.3.3 Hypothese der Spannungsansteuerung

- Impuls mit konstanter Gestalt $\longrightarrow V(x,t) = \tilde{V}\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)$

mit $\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\vartheta}\frac{d\tilde{V}}{dt}$ in Gl. (12.4) $\quad \vartheta \ldots$ Pulsgeschw.

$$\longrightarrow \quad j_{q,r} = \frac{a\varkappa}{2\vartheta^2}\frac{d^2\tilde{V}}{dt^2} - C_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} \quad (12.10)$$

$\longrightarrow$ Messe $\tilde{V}(t,0) \longrightarrow j_{q,r} \longrightarrow$ „neg. Widerstand“

- Hodgkin & Huxley:

$\boxed{\text{positive Rückkopplung: Depolarisation } (V \to 0) \longleftrightarrow g_{Na^+} \uparrow}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{j_{q,r} = \sum_i g_i(V)\,(V - V_i^N)} \quad (12.11)$$

… einfache Hypothese der Spannungsansteuerung

Nichtlinearität!

12.3.4 Nichtlineare Telegraphen-Gl.

- vereinfachtes Modell für Nervenimpuls ≙ Depolarisations-Puls entlang Membran

$$\boxed{g_{Na^+}(v) = g^0_{Na^+} + B v^2} \quad , v = V - V^0 \qquad (12.12)$$

(i) nur Na^+

(ii) kein Gedächtnis! $\longrightarrow$ Kap. 12.4

(iii) Annäherung an realist. Form