12.3.4. Nichtlineare Telegraphen-Gl.

- nichtlineare Leitfähigkeit:

$$\boxed{g_{Na^+}(v) = g^0_{Na^+} + Bv^2}\ , \quad v = V - V^0 \qquad (12.12)$$

$$\Longrightarrow \quad j_{qr} = \sum_i (V_i - V_i^N) g_i^0 + Bv^2 (V - V^N_{Na^+})$$

$$\xrightarrow{E = V^N_{Na^+} - V^0} \quad \boxed{j_{qr} = g^0_{tot} v + Bv^2 (v - E)} \qquad (12.13)$$

$$j_{qr} = 0 \longleftrightarrow v = 0,\ v_{1/2} = \frac{1}{2}\left(E \mp \sqrt{E^2 - 4g^0_{tot}/B}\right) \ldots \text{Fixpunkte}$$

- $\xrightarrow[\text{mit } v_1 v_2 = \frac{g^0_{tot}}{B}]{(12.4)}$

$$\boxed{\lambda^2_{axon} \frac{d^2 v}{dx^2} - \tau \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{v(v-v_1)(v-v_2)}{v_1 v_2}}_{\sim j_{qr}}} \quad (12.14) \ \ldots \text{nichtlineare Telegraphen-Gl.}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0: \quad j_{qr} \sim -\frac{dv}{dt}$$

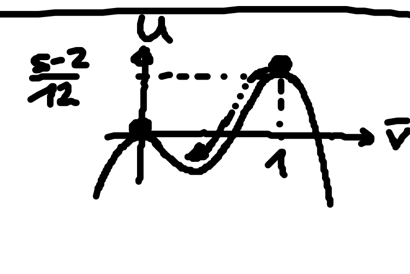
- Impuls mit Geschw. ϑ: $\quad v(x,t) = \tilde{v}\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)$

$$\xrightarrow{(12.14)} \quad \left(\frac{\lambda_{axon}}{\vartheta}\right)^2 \frac{d^2\tilde{v}}{dt^2} - \tau \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{\tilde{v}(\tilde{v}-v_1)(\tilde{v}-v_2)}{v_1 v_2} \qquad (12.15)$$

- dimensionslose Größe: $\bar{v} = \frac{\tilde{v}}{v_2}$, $y = -\frac{\vartheta t}{\lambda_{axon}}$, $s = \frac{v_2}{v_1} > 1$, $Q = \frac{\tau \vartheta}{\lambda_{axon}}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} &= -Q\frac{d\bar{v}}{dy} + s\bar{v}^3 - (1+s)\bar{v}^2 + \bar{v} \\ &= \underbrace{-Q\frac{d\bar{v}}{dy} - \frac{dU}{d\bar{v}}}_{\text{mechan. Analogon: Reibung } Q,\ \text{Potential } U}, \quad U = -\frac{s}{4}\bar{v}^4 + \frac{1+s}{3}\bar{v}^3 - \frac{1}{2}\bar{v}^2 \end{aligned}}$$

mechan. Analogon:
Reibung Q
Potential U



• stabile Lsg: $Q \sim \vartheta$ so, daß $\bar{v} = 0 \longrightarrow v \longrightarrow \underbrace{\bar{v} = 1 \mathrel{\hat=} v_2}_{\text{offene Kanäle}}$ für $y \in [\infty, -\infty]$
$\mathrel{\hat=} t \in [-\infty, \infty]$

o.B. Lsg: $\boxed{\bar{v}(y) = \left(1 + e^{+\sqrt{\frac{s}{2}}\, y}\right)^{-1} \quad \text{mit } Q = \frac{\vartheta}{\lambda_{axon}/\tau} = +\sqrt{\frac{2}{s}}\left(\frac{s}{2} - 1\right)}$

... fortlaufender Puls mit Geschw $\vartheta \sim \frac{\lambda_{axon}}{\tau} \sim \sqrt{a}$

$\approx 6 \frac{m}{s}$ Axon-radius $\mathrel{\hat=}$ Exp.

12.4 Hodgkin-Huxley-Mechanismus & molekulare Details

• Abfall des Aktionspotentials?

12.4.1 Reale Ionen-leitfähigkeiten

• experimentelle Details:
(i) homogene Potentiale
(ii) konstantes Potential $\longrightarrow j_q$
(iii) Beobachtung von j_q: wähle c_j so, daß $V - V_j^0 = 0$, $i \neq j$

• Resultate:
$\longrightarrow g_i = g_i(V, t) \longrightarrow j_{q_i}(t) = j_{q_i}[V(t')]$, $t' \leq t$
$\longrightarrow$ Telegraphen-Gl. $\longrightarrow$ Aktionspot.

• Aktionspot. entlang Membran, Zelle: liefert nur Konzentrationsgefälle für Ionen!

12.4.2 Ionenkanäle

• molek. Mechanismus für g_i? Hodgkin & Huxley: Ionenkanäle?

$g_{tot} \approx 5 \frac{1}{\Omega m^2} \gg g$ (Permeation)

Fragen: (i) Realisierung
(ii) ionenspezifisch
(iii) Reaktionen auf V
(iv) Zeitverhalten

- Neher & Sakmann (1975): Messung einzelner Ionenkanäle!

  offener Na^+-Kanal: $I = GV$, $G = 25 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\Omega}$

  mit $V - V^N_{Na^+} = 100\,mV \longrightarrow I = 0.4\,pA \mathrel{\hat{=}} 16\,000 \frac{Na^+}{s}$

- passiver Ionenkanal: Pore aus Proteinuntereinheiten $\longrightarrow$ „Diffusion"
- ionenspezifisch!
- $G = G(V)$? $\longrightarrow$ Kanäle mit 2 Zuständen (on/off)

  (i) Realisierung

  (ii) 2 Zustände:

$$\longrightarrow \quad g_i \sim G(\text{offen}) \times \underset{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit,}\\ \text{daß Kanal offen}}}{P_{\text{offen}}} \times \underbrace{G_{\text{Kanal}}}_{\substack{\text{Flächen-}\\ \text{dichte der}\\ \text{Kanäle}}}$$

$$P_{\text{offen}} = \frac{1}{1 + e^{\Delta F / k_B T}}, \quad \Delta F = F_{\text{offen}} - F_{zu} \qquad (12.8)$$

$$\text{Hypothese:} \quad \Delta F(V) = \Delta F(0) - \underset{\substack{\text{bew.}\\ \text{Ladung}\\ \text{im Kanal}}}{q}\, \underset{\substack{\text{elektr.}\\ \text{Feld}}}{E}\, \underset{\substack{\text{Verschiebung}\\ \text{der Ladungen}}}{\ell} = \Delta F(0) - q \frac{V}{\underset{\substack{\text{Membran-}\\ \text{dicke}}}{d}} \ell \qquad (12.9)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{P_{\text{offen}} = \frac{1}{1 + A\, e^{-qV\ell / d k_B T}}} \qquad (12.10)$$

$$\text{Exp.:} \quad \frac{q\ell}{k_B T\, d} = 0.15 \frac{1}{mV} \xrightarrow[\ell \leq d]{} \boxed{q \geq 3.8e}$$

- <u>Kinetik</u>: Ionenkanäle $\approx$ 2-Zustands-Systeme: $\longrightarrow$ exp. Relaxationsverhalten?!

(ii) chemisch gesteuert: Bsp. Neurotransmitter Acetylcholine

(i) Spannungsgesteuert: Bsp. K^+-Kanal: exp. Zerfall des Öffnungszustandes

(iii) aber: Na^+-Kanal: kein exp. Verhalten

2 Prozesse: 1. Schnelles Öffnen
2. „langsame Inaktivierung": Inaktivierungssegment

12.5 Nerven, Muskel, Synapsen

- Cajal (1888): Neurone = Zellen
  ↳ (i) Empfänger: Dendriten
  (ii) Sender: Axon
- Verbindung von Neuronen: Synapsen
  Bsp: Motor-Axon / Muskelfaser → Muskelkontraktion