

Theoret. Physik VI : Vertiefung (Nichtlin. Dynamik und Kontrolle)

VL SS 2010 E. Schöll, P. Hövel

Masterstudiengang Physik : Pflichtvorles. TP V/VI (grundlag. 11 + 10 ECTS orientiert)

10 ECTS

anwend. orientiert : TP V oder TP VI

VL Do + Fr 10:15 - 11:45 EW 203

UE : V. Flunkert

Ergänzendes Seminar : Nichtlin. Dynamik mit Zeitverzögerung
Di 16:00 - 17:00 EW 731

Inhalte der VL :

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Gehoppelter Systeme und Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
6. Anwendung auf Laser
7. Anwendung auf Neurodynamik

1. Dynamische Systeme u. deterministisches Chaos

Nichtlineare Dynamik

Fragestellungen :

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeiten von Ungenauigkeit in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d. h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten

1.1. Vektorfelder als dynam. Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Dgln. 1. Ordnung formulieren:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + f_1(y, t) \dot{y} + f_2(y, t) = 0$$

Reibung Kraft

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

Speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \quad H(q, p) \text{ Hamiltonfkt.}$$

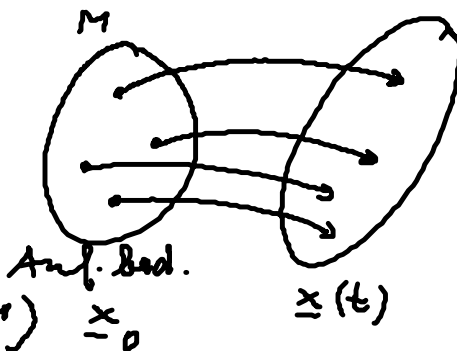
Fluss des Vektorfeldes \underline{F} auf der Mannigfaltigkeit M :
(Phasenraum, z.B. \mathbb{R}^n)

$$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$$

mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0)$

$$= \underline{x}(t; \underline{x}_0)$$

(Gesamtheit der Bahnkurven)
= Trajektorien



Fixpunkt \underline{x}^* des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:
 (stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte.)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \Rightarrow \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen
 $\delta \underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$;

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_* \delta \underline{x} \quad \text{mit Jacobi-Matrix } DF$$

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\delta \underline{x}(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

$\det(A - \lambda I) = 0$ liefert

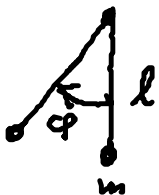
Eigenwertgl.

λ_k : Eigenwerte
 $\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren } der Jacobi-Matrix $(DF)_* = A$

allg. Lösung: $\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
 c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele : (i) Ebenes Pendel $ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$



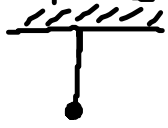
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi \\ x_2 &= p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 &= -mgl \sin x_1 \end{aligned} \right\}$$

Fixpunkte: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = n\pi \ (n=0, 1, \dots)$

Linearisierung $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$



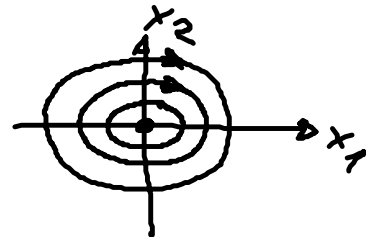
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$

$\Rightarrow x(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$

ungedämpfte Schwingungen



Zentrum

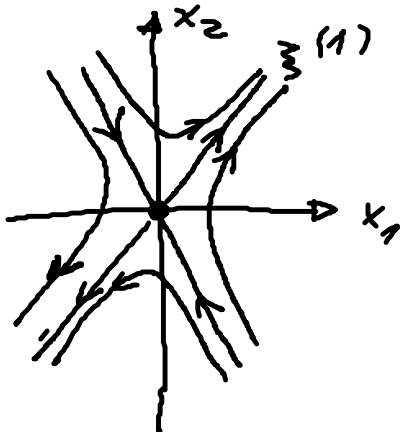
b) $x_1 = \pi, x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$
 allg. Lösung $\delta x(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$



Sattelpunkt

$t \rightarrow \infty \downarrow$
 ∞
instabil
 längs Richtung von $\underline{\xi}^{(1)}$

NB: Da die Matrix A nicht symm. ist,
sind die Eigenvektoren i.a. nicht
senkrecht zueinander!