Theoret. Physik VI : Vertiefung (Nichtlin. Dynamik und Kontrolle)

VL SS 2010 E. Schöll, P. Hövel

Masterstudiengang Physik : Pflichtvorles. TP V/VI (grundlag. orientiert)
10 ECTS 11 + 10 ECTS
anwend. orientiert : TP V oder TP VI

VL Do + Fr 10:15 – 11:45 EW 203

UE : V. Flunkert

Ergänzendes Seminar : Nichtlin. Dynamik mit Zeitverzögerung
Di 16^{00} – 17^{00} EW 731

Inhalt der VL :

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
6. Anwendung auf Laser
7. Anwendung auf Neurodynamik

1. Dynamische Systeme u. deterministisches Chaos

Nichtlineare Dynamik Fragestellungen :

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeiten von Ungenauigkeit in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d. h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten

1.1. Vektorfelder als dynam. Systeme

Dynamik vieler Systeme läßt sich als System von (nichtlin.) Dglн. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)}_{\text{Reibung}}\dot{y} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

Speziell Hamilton'sche Systeme:

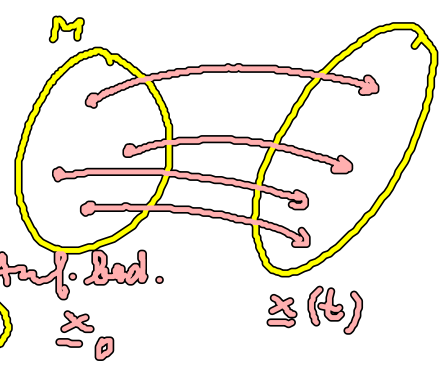
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfkt.}$$

Fluss des Vektorfeldes $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M:
(Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\Phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$

mit $\Phi(x_0, t) = \Phi_t(x_0)$
$= \underline{x}(t; x_0)$

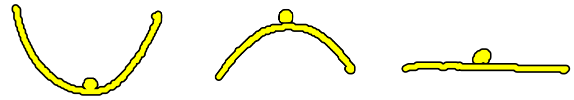
(Gesamtheit der Bahnkurven)
= Trajektorien



Fixpunkt $\underline{x}^*$ des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:
(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte)

$$0 \overset{!}{=} \dot{\underline{x}} = F(\underline{x}^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes:



Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$\delta \underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$;

$$\boxed{\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x^*} \delta x_k}$$

$$\boxed{\delta \dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta \underline{x}}$$ mit Jacobi-Matrix DF

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\delta \underline{x}(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

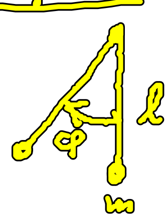
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ liefert **Eigenwertgl.**

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_k & : \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} & : \text{Eigenvektoren} \end{array}\right\} \text{der Jacobi-Matrix } (DF)_* = A$$

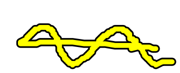
allg. Lösung: $\delta \underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele : (i) Ebenes Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$



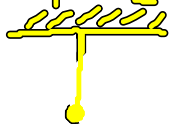
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = - mgl \sin x_1 \end{array}$$



Fixpkte.: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \implies x_2 = 0,\quad x_1 = n\pi \;(n = 0, 1, \dots)$

Linearisierung
$$\begin{pmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl\cos x_1 & 0\end{pmatrix}_*}_{A}\begin{pmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\end{pmatrix}$$

a) $x_1 = x_2 = 0$



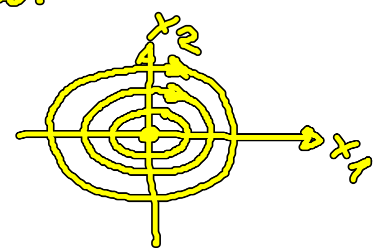
$$A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl & 0\end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix}-\lambda & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

$\implies \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$

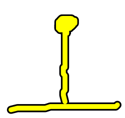
$\implies \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$

<u>ungedämpfte Schwingungen</u>



<u>Zentrum</u>

b) $x_1 = \pi,\ x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ mgl & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$

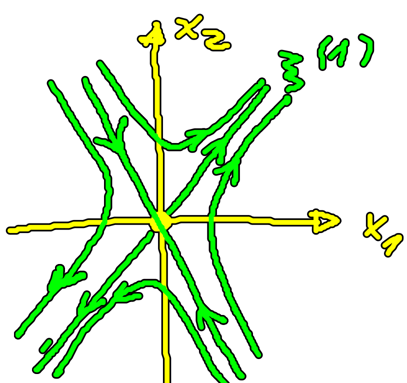
allg. Lösung $\delta\underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}$

$t \to \infty \downarrow$

∞

<u>instabil</u>

längs Richtung von $\underline{\xi}^{(1)}$



<u>Sattelpunkt</u>

NB: Da die Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander!