

# (E) Bifurkation räumlicher Muster

$$\dot{\underline{q}}(x,t) = \underline{F}(\underline{q}, \mu) + D \Delta \underline{q}$$

$$\underline{\delta q} \sim e^{ikx} \cdot e^{\lambda t}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j}(\underline{q}^*) - D_{ij} k^2$$

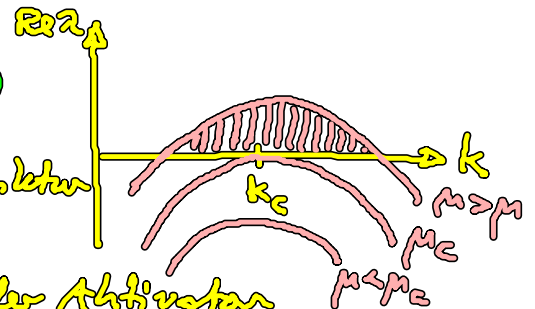
→ Dispersionsrel.  $\lambda(k)$  ⇒  $\text{Re } \lambda = 0$  : Bifurkation

## (E1) Turing-Instabilität

$$\lambda(k) = 0 \quad |k| = k_c \neq 0$$

stat., räumlich periodische Struktur  
mit  $k_c$  bifurkiert

(z.B. langsam diffundierender Aktivator  
+ schneller Inhibitor)



$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2$$

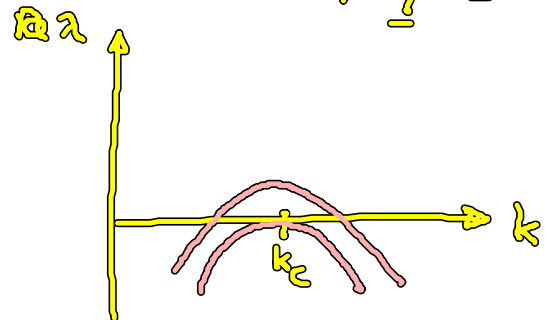
$$\epsilon = \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}$$

## (E2) Stehende / laufende Wellen

$$\lambda(k) = \pm i\omega \quad \text{bei } |k| = k_c \neq 0$$

Oszill., räuml. period. Strukturen → Wellen  $\underline{\delta q} \sim e^{i(kx \pm \omega t)}$

$$\lambda(k) = \epsilon - b(k^2 - k_c^2)^2 \pm i\omega$$

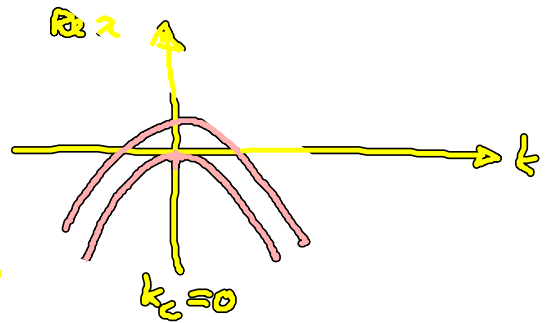


## (E3) Hopf-Bifurkation

$\alpha = \pm i\omega$  bei  $k = k_c = 0$

$$a(k) = \epsilon - b(k^2)^2 \pm i\omega$$

räuml.-homogener Grenzzyklus



## 1.4 Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom): seltener (chaotischer) Attraktor

Komplexes, irreguläres Verhalten kann verschiedene Ursachen haben, die sich im zeitl. Verhalten einer Observablen oft schwer unterscheiden lassen.

Kriterien zur Klassifikation:

quasi-period.	determinist. Chaos	stochastisch (Rauschen)
wenige dyn. Freiheitsgrade: niedrig-dim. Phasenraum		viele mikroskop. Freiheitsgrade
Attraktor: Torus $T^d$ mit $d=2,3,4, \dots$	seltener Attraktor mit fraktaler Dim.	(statist. Ensemble) $f \sim 10^{24}$

Autokorr. fkt.  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$

period. in  $\tau$  |  $\rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$  |  $= 0$  für  $\tau \geq \tau_c$

Fourierspektrum (bzw. spektrale Leistungsdichte  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ )  
power spectrum

diskrete Freq.  $\omega_1, \omega_2, \dots$  | breites Frequenzband

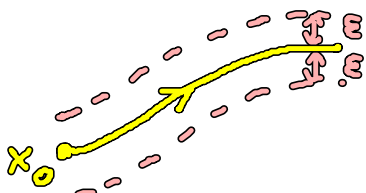
Instab. der Bewegung bei kleiner Störung der Anfangsbed.

typ. universelle  
Bifurk.szenarien

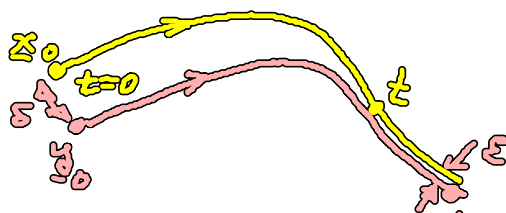
Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

Quantitative Formulierung der Stab. gegenüber kleinen Variat. der Anfangsbed.:

Bahnstabilität (orbitale Stabilität):

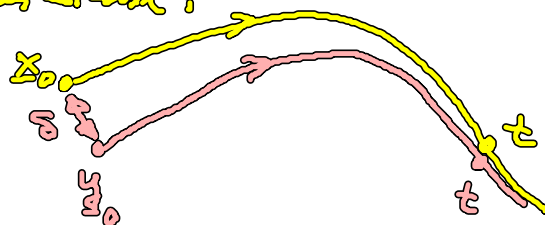


Bahnstabil  
(alle benachbarten Bahnen bleiben in einer  $\epsilon$ -Röhre um  $\phi(t, x_0)$ )



asymptot. Bahnstabil  
(Abstand der benachbarten Bahnen  $\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ )

Ljapunov / asymptotisch stabil:



für dieselbe t gilt

$$|\phi(t, z_0) - \phi(t, y_0)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$ : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektoren  $\underline{z}^{(k)}(t)$

formale Lösung:

$$\underline{\delta x}(t) = e^{\int_0^t dt' A(t')} \underline{\delta x}(0)$$

Zeitverw. einer infinites. Kugel um  $x_0$

$\rightarrow$   $n$ -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $p_k(t) \sim p_k(0) e^{\lambda_k t}$

Def.: Stab. ist bestimmt durch die Ljapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{P_k(t)}{P_k(0)}$$

NB: Führender (größter) Ljapunov-Exponent

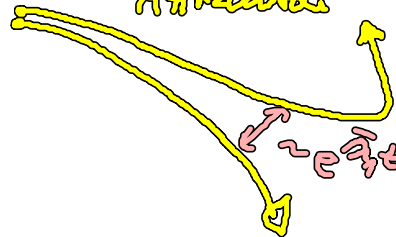
$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\underline{x}(t) - \underline{y}(t)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, \underline{x}_0) - \phi(t, \underline{y}_0)| \sim e^{\lambda t}$$

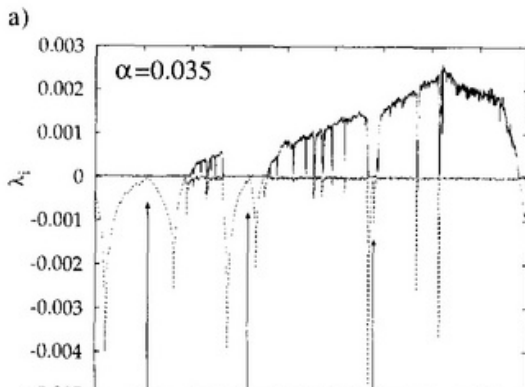
$\lambda < 0$ : kleine Abweichungen der Anf. bed. expon. gedämpft

$\lambda > 0$ : expon. Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen  
 $\hat{=}$  Kriterium für Chaos

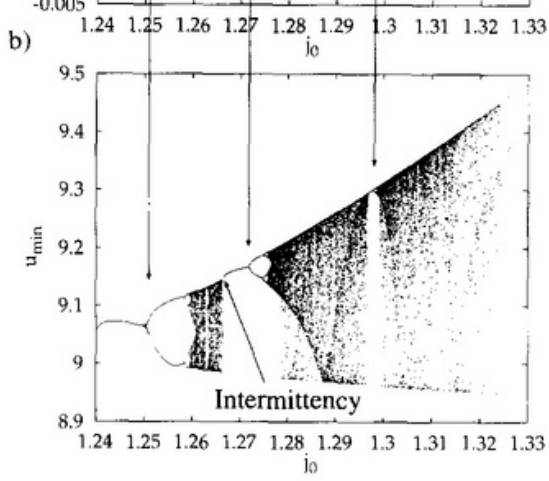
Chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$ :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$   
 instab. Beweg. auf dem Attraktor  
 Annäherung an den Attraktor



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144-150



Modell einer Halbleiterstruktur  
 (Heterostructure mit Electron Spin)



→ Bif. par.

Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for  $\alpha = 0.035$

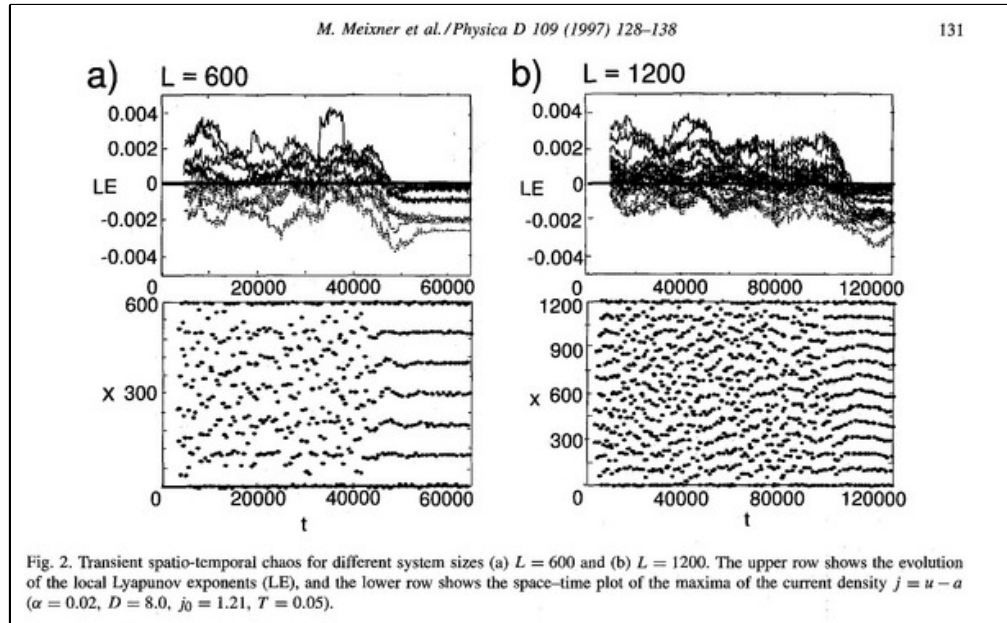


Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a)  $L = 600$  and (b)  $L = 1200$ . The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space-time plot of the maxima of the current density  $j = u - a$  ( $\alpha = 0.02$ ,  $D = 8.0$ ,  $j_0 = 1.21$ ,  $T = 0.05$ ).

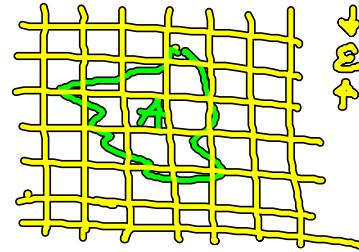
# Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension

## des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge  $A$  in  $\mathbb{R}^n$

Sei  $N(\varepsilon)$  die Mindestzahl von  $n$ -dim. Würfeln mit Seitenlänge  $\varepsilon$ , um  $A$  zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

die fraktale (Hausdorff-)Dimension

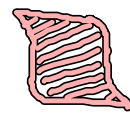
$$\left( \text{d.h. } N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d} \right)$$

Beispiel: Punkt  $N(\varepsilon) = \text{const}$

Linie  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$

Fläche  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$

Volumen  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^3}$

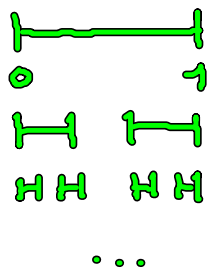


Chaotischer Attraktor in  $\mathbb{R}^3$ : Volumen  $V \rightarrow 0$

(vgl. Lorenz-Modell)

$\Rightarrow d < 3$ ; aber  $d > 2$ ; z.B.  $d \approx 2.05$

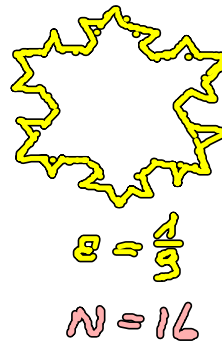
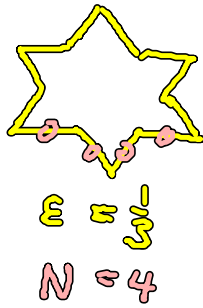
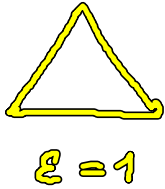
Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)



$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 & : N = 1 \\ \varepsilon = \frac{1}{3} & : N = 2 \\ \varepsilon = \frac{1}{9} & : N = 4 \\ \dots & \\ \varepsilon = \frac{1}{3^n} & : N = 2^n \end{aligned}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309...$$

Beispiel : Koch's Kurve (Schneeflocke)



$$\text{Umfang} = 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow d > 1$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ N &= 4^n \end{aligned} \right\} d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$$1 < d = 1.2618... < 2$$

(zwischen Kurve und Fläche)

analog : Meeresküste