

## 2 Mathematische Grundlagen & einige

### Anwendungen

- Inhalt :
- 2.1 Offene und geschlossene Steuerung
  - 2.2 Chaoskontrolle
  - 2.3 Optimalsteuerung / adaptive Kontrolle
  - 2.4 Quantenkontrolle

### 2.1 Offene und geschlossene Steuerung

Beispiel: Steuerung Parabolantenne, die auf einen Satelliten / ISS / o.ä. gerichtet ist

Spannung  $u$   $\rightarrow$  Verstärker  $\rightarrow$  Motor  $\rightarrow$  Drehwinkel  $\varphi$

Bewegungsgl.:  $\dot{\varphi} = \omega$

$$J \dot{\omega} = -\tau \omega + k u$$

Variablen: Drehwinkel  $\varphi$

Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

Parameter: Trägheitsmoment  $J$

Reibungskoeffizient  $r$

Verstärkungsfaktor  $K$

Ziel: Drehwinkel  $\varphi_1$  zur Zeit  $t_1$  durch Spannung  $u$

$\Rightarrow$  Finde  $u(t)$ , so dass eine Lösung des Systems mit  $\varphi(t_1) = \varphi_1$  bei Anfangsbedingung  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  existiert.

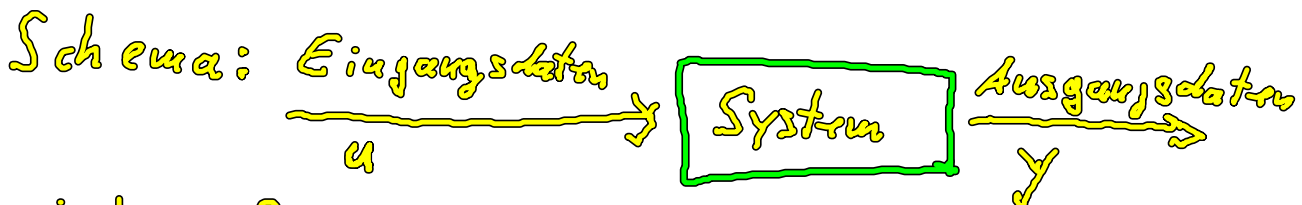
$\Rightarrow$  evtl. viele Lösungen für  $u(t)$

Kriterien: - Zeitoptimale Lösung

- Energieoptimale Lösung

...

Theoretische / Mathematische Grundlage:



interne Dynamik des Systems häufig unbekannt.

Beispiel: Autofahren: Eingänge: - Gas geben

- Bremsen

- Lenken

Ausgänge: - Tacho

- Drehzahlmesser

- Umgebung des Autos
- Navi

interne Dynamik (Motor, Getriebe, ...) unbekannt

Mathematisches Modell:  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  mit  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$   
 $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})$

$\underline{u}$ : Steuerungsfunktion

$\underline{x}$ : Systemzustand

$\underline{y}$ : messbare Ausgangsgrößen

$\underline{f}$ : Funktion oder Zusammenfassung des Systems } evtl. schwierig

$\underline{g}$ : " " " da Messung } zu ermitteln  
interdisziplinäre  
Zusammenarbeit

Definition: Ein lineares Steuerungsproblem hat die

Form:

Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t), \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (\text{Anfangswert})$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \quad (\text{Ausgangsgleichung})$$

Dabei sind:  $\underline{x}(t) \in \underline{X}$  (Zustandsraum)

$$\underline{y}(t) \in \underline{Y} \quad (\text{Ausgangsraum})$$

$$\underline{u}(t) \in \underline{U} \quad (\text{Eingangsraum})$$

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{U}$  sind Mengen von Funktionen, die auf  $[t_0, \infty)$  definiert sind.

$$\text{D.h.: } \underline{x}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{y}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\underline{u}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

außerdem folgt mit dieser Notation für die Matrizen

$$\underline{A}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\underline{B}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,m}$$

$$\underline{C}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,n}$$

$$\underline{D}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,m}$$

NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

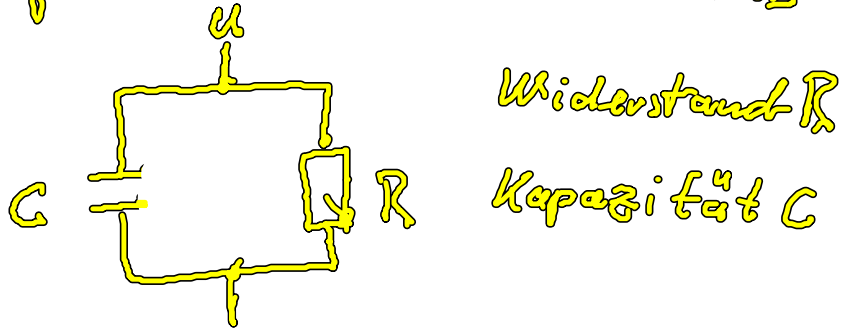
$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_k \underline{x}_k + \underline{B}_k \underline{u}_k \dots$$

Frage: Zusammenhang Ausgang  $\underline{y}$  und Eingang  $\underline{u}$ ?

$\Rightarrow$  Transferfunktion / Input-Output-Relation

$$(t, \underline{x}, \underline{u}) \rightarrow \underline{y}(t)$$

# Beispiel: elektrischer Schaltkreis



Zustand:  $\underline{x}(t) = q(t)$  Ladung am Kondensator

Eingang:  $\underline{u}(t) = u(t)$  Spannung

Ausgang:  $\underline{y}(t) = q(t)$

Zustandsgleichung: Kirchhoffsche Regel

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} u(t)$$

Vergleich mit Definition liefert

$$\underline{A} = -\frac{1}{RC}, \quad \underline{B} = \frac{1}{R}, \quad \underline{C} = 1, \quad \underline{D} = 0$$

Lösung der Zustandsgleichung

$$q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) q(t_0) + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) u(s) ds$$

Anfangsbedingung:  $q(t_0) = q_0$

hier: Lösung der Zustandsgleichung

$\hat{=}$  Ausgangsfunktion

WDH:  $\Rightarrow$  asymptotisch stabil: Realteil der Eigenwerte von  $\underline{A}$  negativ

ii) (Schwach) stabil : Realteil der Eigenwerte von  $\underline{A}$  nicht positiv / negativ oder Null.

Beispiele:  Eigenwert von  $\underline{A}$  :  $-\frac{1}{RC} < 0$

$\Rightarrow$  asymptotisch stabil

Parabolaufbau:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\sigma}{j} \end{pmatrix}}_{=\underline{A}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{j} \end{pmatrix} u$$

Eigenwerte von  $\underline{A}$ :  $(-\lambda) \left(-\frac{\sigma}{j} - \lambda\right) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{\sigma}{j} < 0$$

$\Rightarrow$  (Schwach) stabil

Definition: Gegeben sei das System

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \quad \text{mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

und ein Endzustand  $\underline{x}_1$ . Das Paar  $(t_0, \underline{x}_0)$  heißt zu Zeit  $t_1 > t_0$  nach  $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$  steuerbar, wenn es

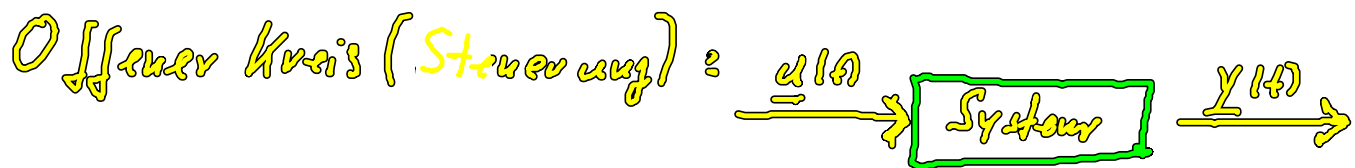
---

eine Steuerfunktion  $\underline{u} \in \underline{U}$ , so dass die Lösung  $\underline{x}(t)$  des Systems mit dieser Steuerung  $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$  erfüllt.

Das Paar  $(t_0, \underline{x}_0)$  heißt nach  $\underline{x}_1$  steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit  $t_1$  ( $t_0 < t_1 < \infty$ ) nach  $\underline{x}_1$  steuerbar ist.

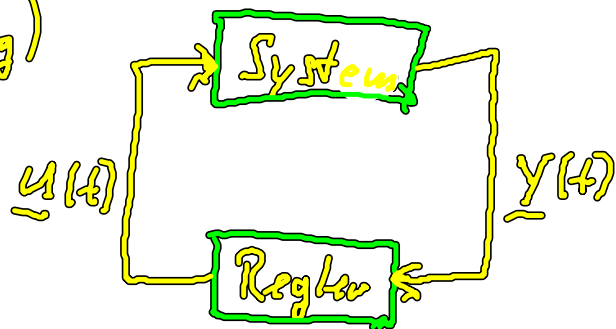
Wenn für jedes  $(t_0, \underline{x}_0)$  und jedes  $\underline{x}_1$  das Paar  $(t_0, \underline{x}_0)$  nach  $\underline{x}_1$  steuerbar, so heißt das System vollständig steuerbar.

Steuerung vs. Regelung:



$$\underline{u}(t) = \underline{h}(t, \underline{x})$$

geschlossener Kreis (Regelung)



etwa:  $\underline{u}(t) = -\underline{F}(t) \underline{y}(t)$

oder:  $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) Das zeitvariante System:  $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$  ist vollständig steuerbar.

ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

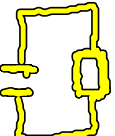
$$\underline{K} := \left( \underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B} \right)$$

hat Rang  $n$ .

iii) Ist  $\underline{p} \neq 0$  ein Eigenvektor zu  $\underline{A}^T$ , so gilt  $\underline{p}^T \underline{B} \neq 0$ .

iv)  $\text{Rang}(\lambda \underline{1} - \underline{A} \quad \underline{B}) = n \quad \forall \lambda$

Beweis: ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) bis morgen (7.5)

Beispiele:   $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$ ,  $\underline{B} = \frac{1}{R}$   $n=1$

$$\Rightarrow \underline{K} = \left( \underline{B}, \dots, \underline{A}^0 \underline{B} \right) = \underline{B} = \frac{1}{R} \neq 0$$

$\text{rang} \underline{K} = 1 = n \Rightarrow$  Das System ist steuerbar.

Parabelaufbau:  $n=2$   $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sigma}{j} \end{pmatrix}$ ,  $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{j} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{K} = \left( \underline{B}, \underline{A}\underline{B} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{j} \\ \frac{k}{j} & -\frac{\sigma k}{j^2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang} \underline{K} = 2 \Rightarrow$  Das System ist steuerbar.



- Weitere:
- stabilisierbar (Steuerung in Gleichgewichtslage)
  - rekonstruierbar (Vergangenheit wiederherstellen)
  - entdeckbar (Zukunft vorher sagen)
  - beobachtbar ( $\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$ )

## 2.2 Chaoskontrolle

WDH: Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen
- wiederkehrende Trajektorien:  
lokal instabile Trajektorien kommen sich auf  
lange Zeiten beliebig nah.

⇒ Ansätze für Kontrollmethoden

⇒ i) OGY-Kontrolle

ii) zeitverzögerte Rückkopplung.