

2.2. Chaoskontrolle

Kriterien für Chaos: - sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen

- lokale Instabilität (positive Lyapunov-Exponenten) bei globaler Begrenzung (seltsame Attraktoren)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instab. sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension ≥ 3 (Überschneidung von Trajektorien in 2D-Systemen)
- wiederkehrende Trajektorien:
 $\forall \epsilon > 0 \exists T_\epsilon > 0 : \forall t \geq 0 \exists T(t, \epsilon)$ mit $0 < T(t, \epsilon) < T_\epsilon$
 $|\underline{x}(t + T(t, \epsilon)) - x(t)| < \epsilon$
in Worten: lokale instabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nah.

\Rightarrow Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

- Kleine Änderung \Rightarrow große Wirkung
(Kontrolleingriff) (Veränderung der Stabilität)
- Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe eines Zielzustands zu landen und diesen mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

Kontrollmethoden: 2.2.1 OGY-Kontrolle

2.2.2 zeitverzögerte Rückkopplung

2.2.1 OGY-Kontrolle

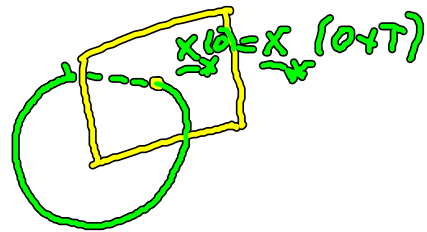
OGY steht für Edward Ott
Celso Grebogi } damals
James York } University of Maryland

Referenz: „Controlling Chaos“ Phys. Rev. Lett 64, 1196 (1990)
- weitere Literatur siehe Web.

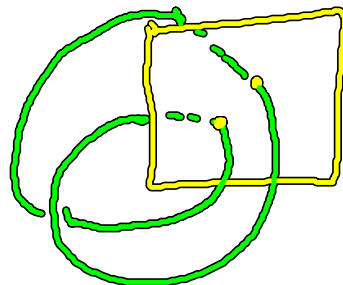
- Idee: i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, u)$ in eine diskrete Abbildung mittels Poincaré-Schnitten.
ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustands ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere Fläche $\mathcal{S} = \{\underline{x} : s(\underline{x}) = 0\}$
mit $\underline{x}_*(0) \in \mathcal{S}$ und $s(\underline{x})$ so definiert, dass \mathcal{S}
senkrecht zu $\underline{x}_*(t)$.

Beispiel: Orbit : Periode 1 :



Periode 2 :



Poincaré-Abbildung: $\underline{x} \rightarrow \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ mit $\underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ der 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche \mathcal{S} (Durchstoßpunkt)

\Rightarrow Folge von Punkten $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$
und t_k Zeit des k -ten Durchstoßens von \mathcal{S}
und $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Damit kann man die Dgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ durch eine diskrete Abb. ersetzen: $\underline{\tilde{x}}_{k+1} = \underline{P}(\underline{\tilde{x}}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{\tilde{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}_*$
(Abweichung vom Zieldurchstoßpunkt)

OBY-Kontrolle mittels:
$$\underline{u}_k = \begin{cases} C \underline{\tilde{x}}_k, & \text{wenn } |\underline{\tilde{x}}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der Nähe von \underline{x}_* ist.

Nachteile von OBY-Kontrolle: - evtl. Wartezeiten

- Kenntnis vom Zielzustand \underline{x}_* nötig

- häufig keine vollständige Messung des Systems möglich
(Poincaré-Schnitt ggf. unmöglich)

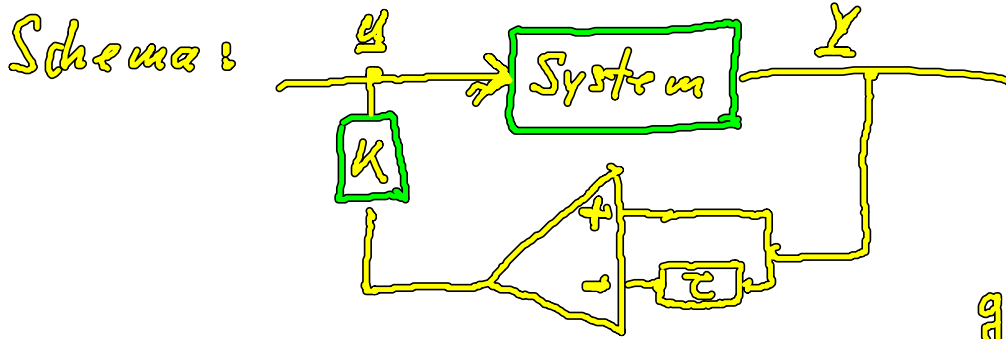
2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplung

"time-delayed feedback" oder Pyragas-Kontrolle

Referenz: K. Pyragas „Continuous control of chaos by self-controlling feedback“ Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

Idee: Verwende statt \underline{x}_* (Zielzustand) eine zeitversögerte Version des Outputs/Ausgangs $\underline{y}(t) : \underline{y}(t - \tau)$

Pyragas-Kontrolle: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{K} (\underline{y}(t) - \underline{y}(t - \tau))$



„closed loop“
geschlossener Kontrollkreis
(Selbst)Regelung

Vorteil: - keine Kenntnis des Zielzustands nötig

- Nichtinvasivität: verschwindende Kontrolle bei erfolgreicher Stabilisierung.

Beispiel: i) Stabilisierung eines in stabilen periodischen Orbits mit Periode T :

Bei Wahl von $\tau = T$ gilt bei erfolgreicher

Stabilisierung $\underline{x}(t) = \underline{x}(t - \tau)$ und somit $\underline{u} = 0$

ii) Stabilisierung von Fixpunkten



Kontrollparameter: τ : Zeitverzögerung

\underline{K} : Rückkopplungsmatrix
(häufig: $\underline{K} = K \cdot \underline{1}$)
↑
Skalar

Beispiel für Chaoskontrolle: Rössler-System

$$\dot{x}(t) = -y(t) - z(t) - K(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y}(t) = x(t) + a y(t)$$

$$\dot{z}(t) = b + z(t) \underbrace{(x(t) - \mu)}_{\text{Nichtlinearität}}$$



chaotisch für z.B.: $a = 0.2 = b$, $\mu = 6.5$

\Rightarrow Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91673$

Periode 2-Orbit mit $T_2 = 11.82814$

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtlinear) für $0.24 < K < 2.3$

Vertiefung: - Kap. 3 verteilte Systeme (Stabilitätsanalyse von Systemen mit delay, Erweiterung von Pyragas-Kontrolle...)

- Balanov, Janson, Schöll, Phys. Rev. E 71, 046222 (2005)

Nachtrag zu Kap. 2.1:

ii) Die Steuerbarkeitsmatrix $\underline{K} := (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B})$ hat Rang n .

\Leftrightarrow iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu \underline{A}^T , so gilt $\underline{p}^T \underline{B} \neq 0$.

ii) \Rightarrow iii) Annahme: $\underline{p} \neq 0$ Eigenvektor zu \underline{A}^T und $\underline{p}^T \underline{B} = 0$.

Dann: $\underline{p}^T \underline{K} = 0 \Rightarrow \text{Rang } \underline{K} \neq n$. \downarrow

iii) \Rightarrow ii) Rang $\underline{K} \neq n$ $\underline{p}^T \underline{K} = 0$, $\underline{p} \neq 0$

Dann: $\underline{p}^T \underline{A}^j \underline{B} = 0$

und somit für p linksseigenen Vektor von \underline{A}

$$\underline{p}^T \underline{A} \underline{B} = \lambda \underline{p}^T \underline{B} = 0 \quad \Downarrow$$

2.3 Optimalsteuerung / adaptive Kontrolle

System: $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

Optimalsteuerung: Kontrolle unter Minimierung einer Kostenfunktion J .

Beispiel: Parabolsteuerung:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sigma/\tau \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa/\tau \end{pmatrix} u$$

Kostenfunktion:

$$J(\underline{x}, u) = \underbrace{\underline{x}(t_f)^T \underline{P} \underline{x}(t_f)}_{(1)} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\underline{x}(t)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)}_{(2)} + \underbrace{u(t)^2 R}_{(3)} dt$$

t_f : finale Zeit (Zeit für Kontrolle)

(1) Abweichung des Endzustands $\underline{x}(t_f)$ vom Zielzustand

(2) Einschwingverhalten („Summe der Abweichungen“)

(3) gemittelte Amplitude der Eingangsspannung

Ziel: Minimierung von $J(\underline{x}, u)$