2.3 Optimalsteuerung / adaptive Kontrolle (Fortsetzung)

System: $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

allgemeiner Fall der Optimalsteuerung:

$$J(\underline{x},\underline{u}) = \frac{1}{2}\Big(\underline{x}(t_f)^T \underline{\underline{M}}\,\underline{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Big[\underline{x}(t)^T \underline{\underline{Q}}\,\underline{x}(t) + \underline{u}(t)^T \underline{\underline{R}}\,\underline{u}(t) + \underline{x}(t)^T \underline{\underline{S}}\,\underline{u}(t) + \underline{u}^T(t)\,\underline{\underline{S}}^T \underline{x}(t) \Big]\, dt \Big)$$

mit $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{m,m}$

und $t_0 < t_f \leq \infty$

Ziel der Optimalsteuerung:

Finde $\underline{u}(t)$, so dass die Kostenfunktion J minimal wird.

Satz: Betrachte $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit Kostenfunktion J.

Sei $\underline{u}_*(t) \in \underline{U} = \{ \underline{u} : t \longmapsto \underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \text{ stückweise stetig} \}$ optimale Steuerung und $\underline{x}_*(t) \in \mathbb{R}^n$ sei die zugehörige Lösung.

Dann gibt es ein Kozustandsfunktion $\underline{\mu}(t) \in \mathbb{R}^n$, so dass $\underline{x}_*(t)$, $\underline{u}_*(t)$ und $\underline{\mu}(t)$ das lineare Randwertproblem

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & 0 & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{A}}^T & \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{S}}^T & \underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\mu} \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{\mu}} \\ \dot{\underline{u}} \end{pmatrix}$$

mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ und $\underline{\mu}(t_f) = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}(t_f)$ lösen.

Fazit: Existiert Optimalsteuerung $\underline{u}_*(t)$

$\Rightarrow$ Gleichung für $\underline{\mu}(t)$.

Beweis(-skizze): i) Störungstheorie 1. Ord.:

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_*(t) + \varepsilon\,\underline{v}(t)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_*(t) + \varepsilon\,\underline{\varphi}(t)$$

ii) Definiere Hamilton-Funktion aus Kostenfunktion $\mathcal{S}$

iii) Berechne Abweichung $\mathcal{S}(\underline{x},\underline{u}) - \mathcal{S}(\underline{x}_*,\underline{u}_*)$

$\Rightarrow$ $\dot{\underline{\mu}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\mu} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{x}_* + \underline{\underline{S}}\,\underline{u}_*$ mit Endbedingung

$\underline{\mu}(t_f) = \underline{\underline{M}}\,\underline{x}(t_f)$

Satz: Seien $\underline{x}_*, \underline{u}_*, \underline{\mu}$ so gewählt, dass sie das lineare Randwertproblem (s.o.) lösen. Es gelte

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{S}}^T & \underline{\underline{R}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}} \quad \text{pos. semidefinit.}$$

Dann gilt: $\mathcal{S}(\underline{x},\underline{u}) \geq \mathcal{S}(\underline{x}_*,\underline{u}_*)$

für alle $\underline{x},\underline{u}$, die die Systemgleichung erfüllen.

Fazit: $\underline{x}_*, \underline{u}_*$ minimieren die Kostenfunktion $\mathcal{S}$.

adaptive Kontrolle:

Betrachte: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)$ mit Kostenfunktion $Q(\underline{x},t)$ (Zielfunktion)

und $\lim_{t\to\infty} Q(\underline{x},t) = 0$ (Abweichung soll verschwinden) (Kosten)

z.B.: $Q(x,t) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}(t) - \underline{x}(t-\tau)\right)^2$

Frage: Verknüpfung v. Q mit Kontrolle $\underline{u}$?

Idee: Herleitung einer zusätzlichen Differenzialgleichung für $\underline{u}$, die Änderungen von Q berücksichtigt.
(speed gradient method)

„Speed of Q": $\dot{Q} = \omega(\underline{x},\underline{u},t)$

$$\Rightarrow \dot{Q}(\underline{x}(t),t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{\nabla}_x Q(\underline{x},t)\,\dot{\underline{x}}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{\nabla}_x Q(\underline{x},t)\,\underline{f}(\underline{x},\underline{u},t)$$

Daraus folgt (gradient):

$$\underline{\nabla}_u\, \omega(\underline{x},\underline{u},t) = \underline{\nabla}_x Q(\underline{x},t)\,\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \qquad \text{(Gradient bezgl. } \underline{u}\text{)}$$

Differenzialgleichung für $\underline{u}$:

$$\dot{\underline{u}} = -\Gamma\, \underline{\nabla}_u\, \omega(\underline{x},\underline{u},t) = -\Gamma\, \underline{\nabla}_u\, \dot{Q}(\underline{x},t)$$

NB: Funktioniert auch zur Herleitung einer Gleichung für Kontrollparameter.

Beispiel: $u(t) = -K\left[x(t) - x(t-\tau)\right]$ Pyragas-Kontrolle

angewendet auf Rössler-System

$$\dot{x} = -y - z - K\left(x - x(t-\tau)\right)$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + z(x-\mu)$$

und Zielfunktion $Q(x) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(t-\tau)\right)^2$

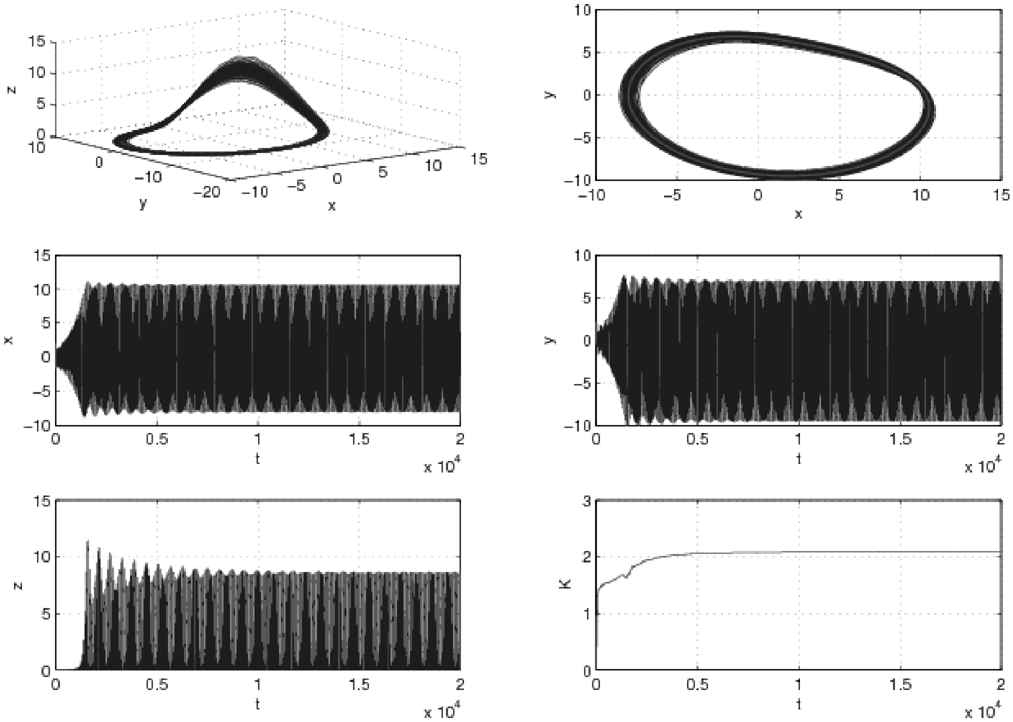
$\dot{k} = -\Gamma \nabla_k \dot{Q}$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \left(x(t) - x(t-\tau)\right)\left(\dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau)\right)$$

aus Systemgleichung

$$\Rightarrow \dot{Q} = \left(x(t) - x(t-\tau)\right)\Big[\underbrace{-y(t) - z(t) + y(t-\tau) + z(t-\tau)}_{\text{hängt nicht von } k \text{ ab}}$$
$$-k\left(x(t) - 2x(t-\tau) + x(t-2\tau)\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \dot{k} = -\Gamma \frac{dQ}{dK} = +\Gamma \left(x(t) - x(t-\tau)\right)\left[x(t) - 2x(t-\tau) + x(t-2\tau)\right]$$



Parameter: $a = 0.2,\ b = 0.2,\ \mu = 6.5$

$\tau = T_1 = 5.91679$ ($\hat{=}$ Periode des Periode 1-Orbits)

Fazit: adaptive Kontrolle (speed gradient method) funktioniert, aber der Endwert/asymptotische Wert der Kontrolle/Kontroll-parameter hängt von Anfangsbedingungen ab.

Weitere Verknüpfungen Q mit $\underline{u}$:

- $\underline{u}(t) = \underline{u}_0 - \Gamma\, \underline{\nabla}_{\underline{u}}\, \dot{Q}(\underline{x}, t)$
- $\underline{u}(t) = \underline{u}_0 - \Gamma\, \underline{\psi}(\underline{x}, \underline{u}, t)$ mit $\underline{\psi}(\underline{x}, \underline{u}, t)^T\, \underline{\nabla}_u\, \omega(\underline{x}, \underline{u}, t) \geq 0$
- $\underline{u}(t) = \underline{u}_0 - \Gamma\, \text{sign}\, \underline{\nabla}_{\underline{u}}\, \omega(\underline{x}, \underline{u}, t)$

  ↑ komponentenweise
- weitere Bedingungen $g(\underline{x}, \underline{u}, t) = 0$

$$\Rightarrow \dot{\underline{u}}(t) = -\Gamma\, \underline{\nabla}_u\, \omega(\underline{x}, \underline{u}, t) - \lambda\, \underline{\nabla}_u\, g(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

2.4 Quantenkontrolle

klassische Anwendung adaptiver Kontrolle

Kostenfunktion enthält Hamilton-Funktion: $Q(q,p) = \frac{1}{2}\left(H(q,p) - H_*\right)^2$
mit H_* als Zielenergie.

quantenmechanische Systeme:

Schrödinger-Gleichung: $i\hbar \dot{\psi} = \Big(\underbrace{H_0}_{\substack{\text{ohne Kontrolle} \\ \text{(freies System)}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} u_k H_k}_{\text{Kontroll-Hamilton-Operatoren}}\Big)\psi$

Ziel: konstruiere u_k, so dass eine Observable Z im Mittel einen vorgegebenen Wert Z_* annimmt:

$$\lim_{t\to\infty} \psi^*(t)\, Z\, \psi(t) = Z_* \;.$$

Idee: Speedgradient method anwenden:

$$Q(\psi) = \left(\psi^* Z \psi - Z_*\right)^2, \text{ d.h. } \lim_{t\to\infty} Q(\psi) = 0 \,.$$

Ann.: Z kommutiert mit H_0 (gleichzeitig scharf messbar, keine Beeinflussung des ges. Systems nur durch Messung von Q)

$$\nabla_{u_k} \dot{Q} = \nabla_{u_k}\left[2\left(\psi^* Z\psi - Z_*\right)\left(\dot{\psi}^* Z \psi + \psi^* Z \dot{\psi}\right)\right]$$

$$= \nabla_{u_k}\left[2\left(\psi^* Z \psi - Z_0\right)\frac{i}{\hbar}\,\psi^*\Big(H_0 Z - Z H_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k (H_k Z - Z H_k)\Big)\psi\right]$$

$$\Rightarrow u_k = -\Gamma \frac{2i}{\hbar} \left(\Psi^* z \Psi - z_0 \right) \left(\Psi^* (H_k z - z H_k) \Psi \right)$$

$\Rightarrow$ adaptive Gleichung für qm. Kontrollfunktionen u_k.

Anwendung: Kontrolle chemischer Reaktionen molekularer Ebene.

Kontrolle durch spezielle geformte Laserpulse, die gewünschte Reaktionskanäle öffnen.

Ref.: z.B.: AG T. Brixner (Würzburg)

- Phys. Chem. Chem. Phys. **9**, 2470 (2007)
- ChemPhysChem **4**, 418 (2003)