

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher : determinist. dynam. Systeme

jetzt : stochastische dynam. Systeme

5.1 Rauschinduzierte Oszillationen u. Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

(\leftrightarrow im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabh.,
Wahrscheinl. verteilung durch Jaynes'sches Prinzip der
vorurteilsfreien Schätzung geg.: verallg. kanon. Verteilung
 $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda M_i^v}$, M_i^v Zufallsvar.)

Verbundwahrscheinl. zeitabhängig: $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$
Realisierungen x_1, x_2, x_3, \dots von $X(t)$

Markoff-Prozess :

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2, \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)}$$

bedingte
Wahrsch.

$$\stackrel{!}{=} p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

hängt nur
von der
jüngsten Bed.
ab

$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$
kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

Reibung Rauschen

Gauß'sches weißes Rauschen:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$\langle \dots \rangle =$ statist. Mittelung

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

unkorrel.

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrel. fkt.

$$\underline{r}_F(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergod. Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\underline{r}_F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+s) \quad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

Fourier-Transform: $\hat{x}(\omega; T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t)$ in $t \in [-T, T]$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

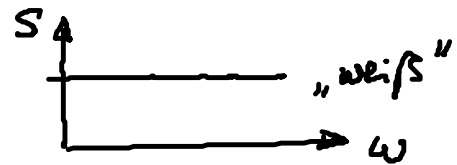
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

Wiener-Khinchin-Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.

Van der Pol-Osz. (1926, el. Stromkreis)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi$ nichtlin. Osz.
 D Rauschintensität
 $\xi(t)$ Gauß'sches weißes Rausch.

$D=0$: Fixpkt. $x=y=0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\text{tr} A = \varepsilon$, $\det A = \omega_0^2$

$\varepsilon=0$ Hopf-Bif., $\varepsilon < 0$ stabiler Fokus

$\varepsilon > 0$ instab. Fokus + LC

hier: $\varepsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0$

\Rightarrow keine determinist. Osz.

aber rauschinduzierte Osz. ($D \neq 0$)

lit. Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)

Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)

Janson, Balanov, Schöll: in Handbook of Chaos Control (2008)

Schöll, Balanov, Janson: Stock. Dyn. 5, 281 (2005)

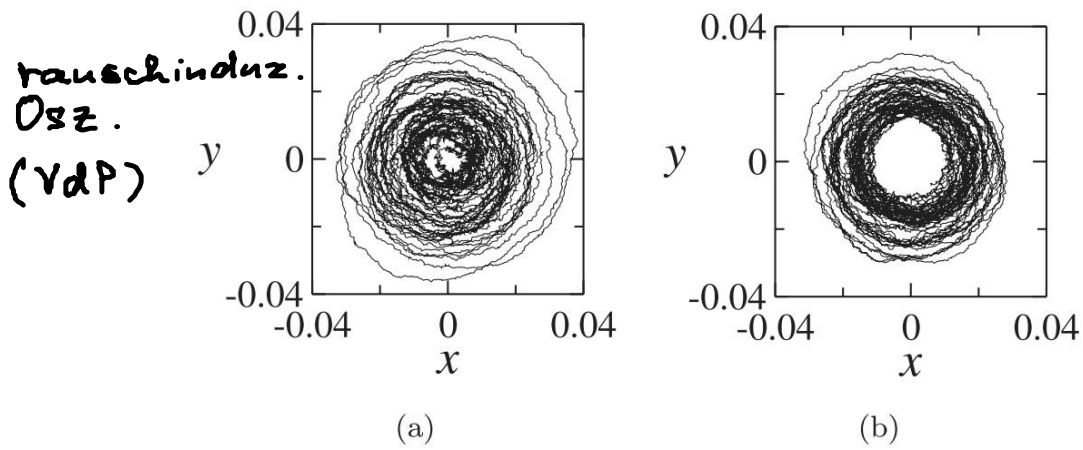
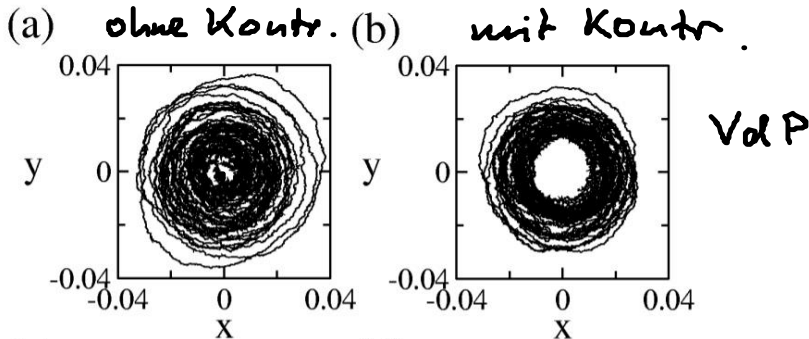


Fig. 1. Numerically simulated phase portraits of noise-induced oscillations of the Van der Pol system at $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = -0.01$, $D = 0.003$: (a) without feedback $K = 0$; (b) with feedback $K = 0.2$, $\tau = T_0$. In both cases the system was integrated during 300 time units.

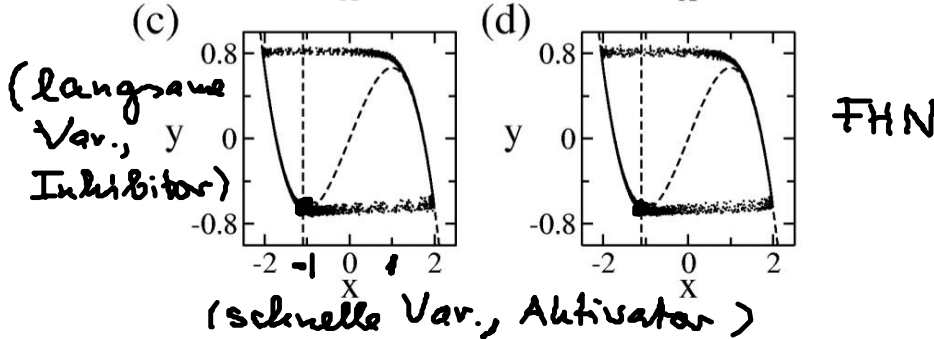
2. Beispiel : anregbares System (Typ II)
FitzHugh - Nagumo - Modell (Neuron)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + D\xi(t) \end{aligned}$$

Zeitskalenverh. $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = 0.01$)
 Anreg.schwelle a ($a = 1.1$)
 $D = 0$: Fixpnt. $x = -a$, $y = -a - \frac{a^3}{3}$
 stabiler Kn. für $a > 1$
(anregbar)



(hier nicht betrachtet:
 $a < 1$ inst. Fixp. + LC)



$D \neq 0$: rauschinduz. Osz.
 (spiking von Neuronen)

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at $D = 0.003$; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at $D = 0.09$ (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c) $K = 0$; (b),(d) $K = 0.2$, $\tau = T_0$.

Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))

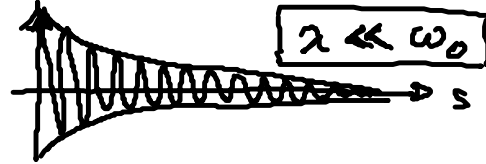
Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 807 (1993)
(stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen:

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintens. D_{opt}

- Maß für Regularität:
Korrelationszeit $t_{cor} = \frac{1}{\underline{\Phi}(0)} \int_0^{\infty} |\underline{\Phi}(s)| ds$
Varianz Autokorrel. fkt

(für lin. stoch. Prozess $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$
 $\underline{\Phi}(s) = \underline{\Phi}(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$ $\underline{\Phi}$



$$t_{cor} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

Approx. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$ Füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}(s) = \underline{\Phi}(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{cor}}} \cos \omega_0 s \text{ (exp. abkling. Korrel.)}$$

