Zum Planck'schen Strahlungsgesetz

$\Rightarrow$ Hohlraumstrahlung

$$u(\nu,T) = \frac{dU}{d\nu}$$

spektrale Energiedichte

Wien: $u = \nu^3 \underbrace{f\left(\frac{\nu}{T}\right)}_{a e^{-b\frac{\nu}{T}}}$

(1896)

a, b = const

$\Rightarrow$ Stefan-Boltzmann

$$U \sim T^4$$

1900: Raleigh:

$$u\,d\nu = \underbrace{dN(\nu)}_{\text{Zustandsdichte}} \cdot 2 \cdot \overbrace{k_B T}^{\text{mittlere Energie}}$$

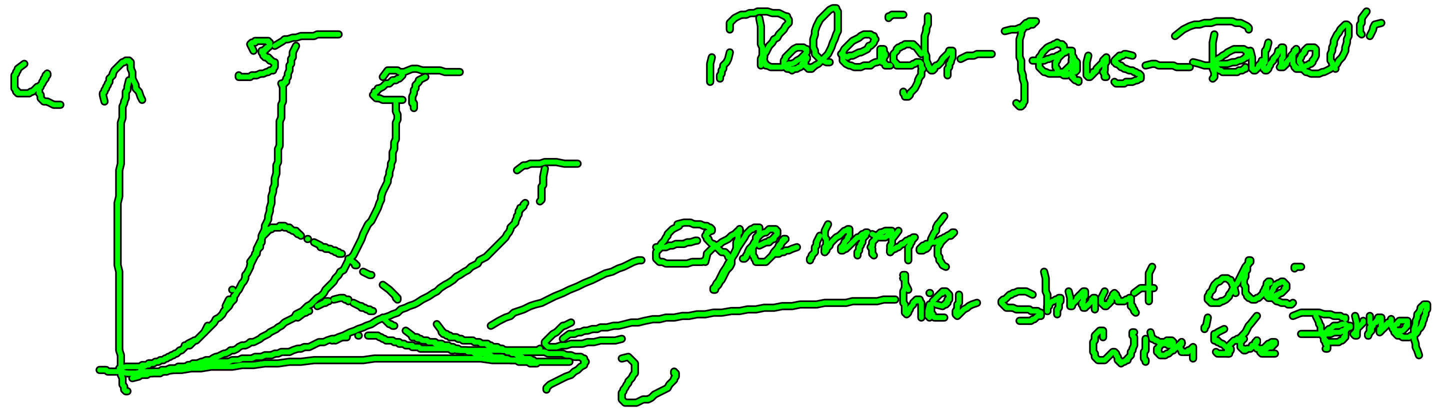
mittlere Energie pro Welle (Gleichverteilungssatz)

Zustandsdichte: Anzahl der Frequenzen in einer Kugelschale $\nu, \nu + d\nu$

insgesamt

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

„Raleigh-Jeans-Formel"



$\Rightarrow$ Raleigh-Formel versagt bei sehr hohen Frequenzen

$$U(T) = \int_0^\infty d\nu \, \underbrace{u(\nu,T)}_{\sim \nu^2} \underset{\text{Raleigh}}{=} \text{„}\infty\text{"}$$

Ultra violett-Katastrophe!

Planck'sche Hypothese (1900)

- Das Strahlungsfeld besteht aus einer Vielzahl von Schwingungen harmonischen Oszillatoren mit einer best. Frequenz ν

Klassisch: Jeder Oszillator hat kontinuierliches Energiespektrum. d.h. $0 \leq \nu \leq \infty$

$0 \leq E \leq \infty$ Energie

jetzt: Die Oszillatorenergien sind „gequantelt": Es sind also nur diskrete Energiewerte möglich

$E_n = n\,\varepsilon_0$

$n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$

ε_0: elementares „Energiequant"

Gesamtenergie:

$$E = \sum^{\infty} N(n) \underbrace{n\,\varepsilon_0}_{E_n}$$

$\underset{n=0}{}$ $\underbrace{\quad}$

Zahl der Oszillatoren mit Energie E_n

mittlere Energie pro Oszillator

$$\varepsilon = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)\, n\, \varepsilon_0}{\sum_{n=0}^{\infty} N(n)}$$

} Gesamtzahl der Oszillatoren

Annahme: $N(n) \sim e^{-\frac{n\varepsilon_0}{k_B T}}$ Boltzmann-Statistik (→ VL Thermodynamik)

einsetzen von $N(n)$ in den Ausdruck für ε

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} - 1}$$

mittlere Energie pro Oszillator

Idee: $u(\nu, T) = \underbrace{\frac{8\pi\nu^2}{c^3}}_{\text{Zustandsdichte}} \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} - 1}$

noch zu fordern:

u muß wieder die Form haben: $u \sim \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_0 = h\nu}$$

elementares Energiequant

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

Planck'sches Wirkungsquantum

$$\rightarrow \boxed{u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^3 \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}}$$

Planck'sche (1900) Strahlungsformel

enthält sowohl die Wien'sche als auch die Raleigh-Formel als Grenzfälle $h\nu \ll k_BT$ und $h\nu \gg k_BT$

→ Zentrales neues Konzept:

→ Quantelung der Energie

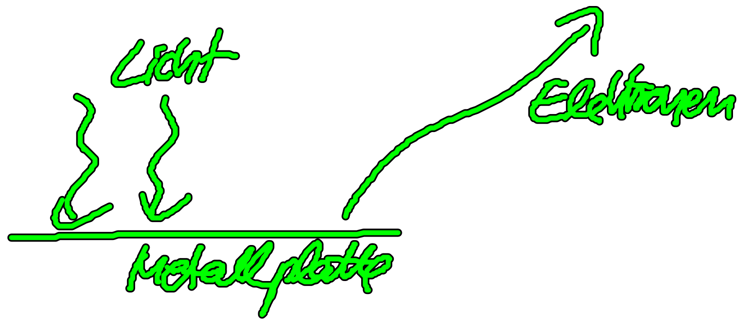
und:

Die mittlere Energie pro Oszillator $\neq k_BT$

I.2. Photoeffekt und Comptoneffekt

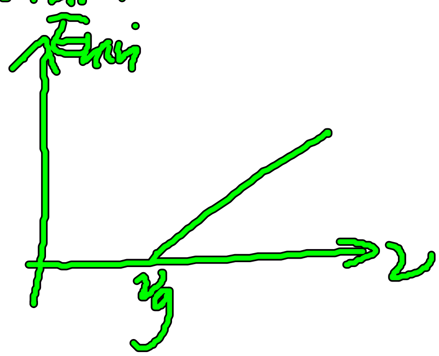
zum Photoeffekt

Hertz (1887)



Oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz ν_g (materialabhängig) des eingestrahlten Lichts treten aus der Metalloberfläche Elektronen aus („Photoelektronen")

- kinetische Energie dieser Elektronen ist
  - (i) unabhängig von der Intensität des Lichts
  - (ii) frequenzabhängig



Klassische Elektrodynamik:

$$\underbrace{I}_{\text{Intensität der Welle}} \sim \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \sim \underbrace{u}_{\text{Energiedichte}}$$

d.h. klassisch erwartet man einen Zusammenhang zw. $E_{kin} \longleftrightarrow I$

kinetische Energie der Elektronen

Intensität der Strahlung

Deutung durch Einstein (1905)

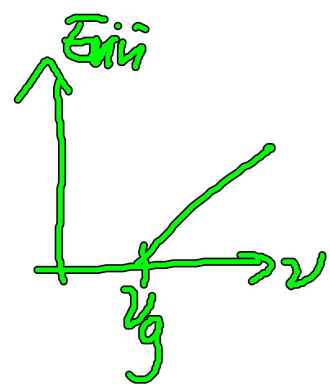
Das Licht verhält sich bei der Wechselwirkung mit Materie nicht wie eine Welle, sondern wie eine Ansammlung von Teilchen, sog. Lichtquanten oder Photonen

Jedes Photon hat Energie $h\nu$

Jedes aus der Materie (Metalle) befreite Elektron hat genau ein Photon absorbiert und erhöht damit Energie um $h\nu$

$\rightarrow E_{kin} = h\nu - W = \frac{1}{2}mv^2$

W: Austrittsarbeit (materialabhängig)



$$v_g = \frac{\omega}{k}$$

Einstein's Lichtquantenhypothese ist ein wichtiges Beispiel für das Konzept des „Welle-Teilchen-Dualismus“

Compton-Effekt (1922/23)

→ Weiterer Hinweis auf die Gültigkeit der Lichtquantenhypothese

Streuung von Röntgenstrahlung an freien Elektronen (e^-)

einfallende Strahlung

e^-

$h\nu$ – Energie eines Photons in dieser Strahlung

$h\nu'$ ← Frequenz nach dem Stoß

man beobachtet $\Delta\lambda = \lambda_c (1-\cos\theta)$

$\Delta\lambda$: Wellenlänge; θ: Streuwinkel; λ_c: Compton-Wellenlänge

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$$

m_e: Masse des Elektrons; c: Lichtgeschw.

Erklärung:

Der ganze Streuprozess ist ein Stoß zwischen einem Photon und einem Elektron, wobei Energie und Impuls erhalten bleiben!

Weitere allgemeine Eigenschaften von Photonen

i) $E = h\nu$

ii) aus der Relativitätstheorie: Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und haben keine Masse

$$\Rightarrow E = pc$$

(Relativist. Gesamtenergie:
$E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$)

aus i) und ii)

$$h\nu = pc \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c}$$

iii) Klass. Elektrodynamik
$\Rightarrow$ Licht ist elektromagnetische Welle im Vakuum

mit Dispersionsrelation: $\omega = 2\pi\nu = c|\underline{k}|$

(E-Dynamik:

$$\text{Welle} \sim e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Zeit

Wellenvektor, gibt Ausbreitungsrichtung an)

einsetzen:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{2\pi}\frac{\omega}{c} = \frac{h}{2\pi}|\underline{k}|$$

Impuls

allgemeiner:

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\boxed{\underline{p} = \hbar\,\underline{k}}$$

Es gibt eine Relation zwischen Impuls (Teilcheneigenschaft) und dem Wellenvektor (Welleneigenschaft)

I.3. Bohr'sches Atommodell

Rutherford (1911)

→ Streuung von α-Teilchen (2-fach positiv geladene He^{4}-Atome) an Gold

seine Schlußfolgerung:

Es gibt einen positiv geladenen Atomkern gefen mit sehr kleinen Abmessungen

$(\sim 10^{-15}\,m)$

Idee: Elektronen umkreisen den Kern auf elliptischen Bahnen (Zusammenspiel von Coulomb- und Zentrifugalkraft)

<u>Probleme:</u>

Warum beobachtet man keine kontinuierliche Strahlung sondern diskrete Energiespektren?

Bohr'sches Postulat (1913

- Die möglichen Energien der kreisenden Elektronen sind <u>diskretisiert</u>
  → stationäre Zustände

- Übergänge zwischen den stationären Zuständen bewirken elektromagnet. Strahlung bestimmter Frequenz

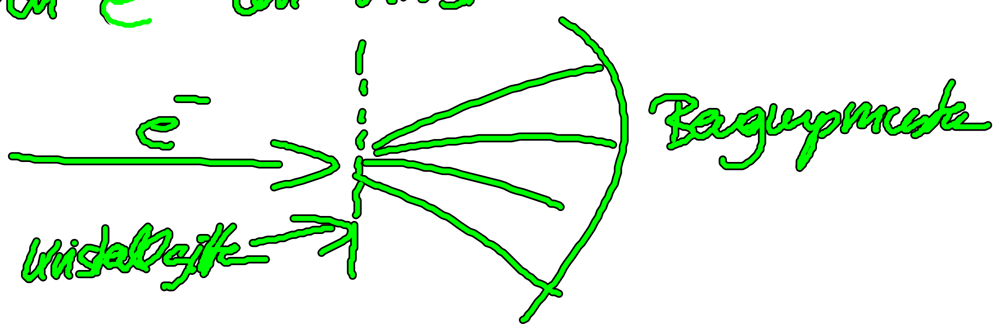
$$\underbrace{E_n - E_m}_{\text{benachbarte Niveaus}} = h\nu$$

I.4. Wellencharakter der Materie

Postulat von de Broglie (1924)

Ebenso, wie sich das Licht als System von Teilchen verhalten kann, können „materielle" quantenmechanische Objekte (z.B. Elektronen) auch Wellencharakter haben

„Nachweis" durch Versuch Davisson und Germer
→ Streuung von e^- an Kristalloberfläche



genauer:

Die Beziehungen

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

und $\underline{p} = \hbar \underline{k}$

sollen für alle (auch nicht-relativistische) Teilchen gelten, in Analogie zum Licht!

Dispersionsrelationen:

Photonen: $\omega = c|k|$

Elektronen: $E = \hbar\omega = \overbrace{\frac{p^2}{2m}}$

kinetische Energie eines nicht-relativist. Teilchens!

freies Elektron ohne Wechselwirkung

einsetzen der Relation $p = \hbar \underline{k}$

$$E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$$

Dispersionsrelation für freie, nicht-relativist. quantenmechanische Teilchen (z.B. Elektronen)