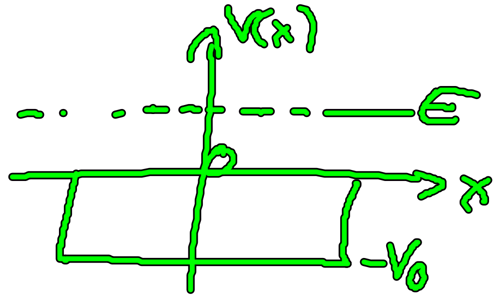
Wh:

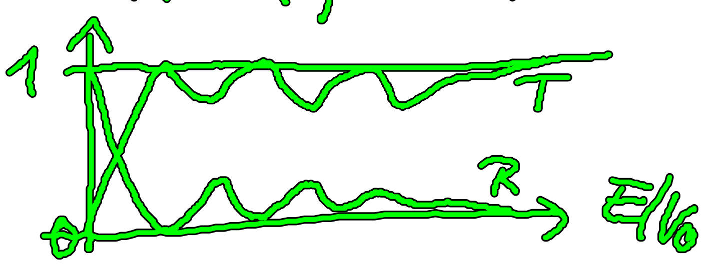


Streuzustände:

Annahme: Teilchen als einfallende Welle von links

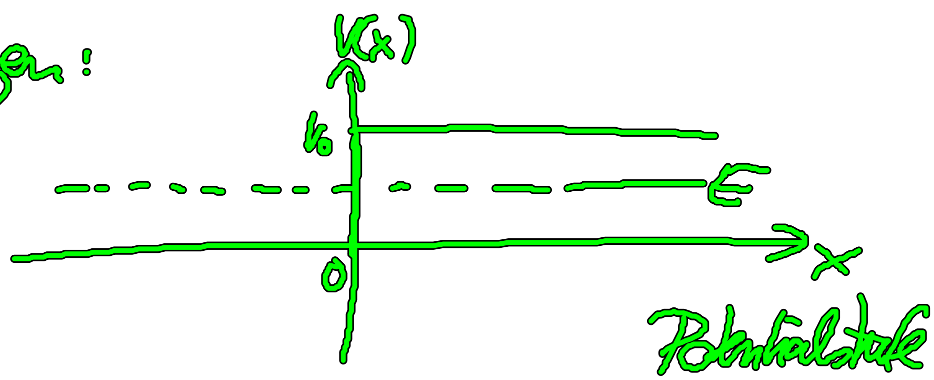
→ Teil dieser Welle wird reflektiert,
der Rest transmittiert

$$R = \left|\frac{j_r}{j_0}\right| \quad , \quad T = \left|\frac{j_d}{j_0}\right| \quad , \quad R+T=1$$



II.7.5. Tunneleffekt

Vorüberlegungen:



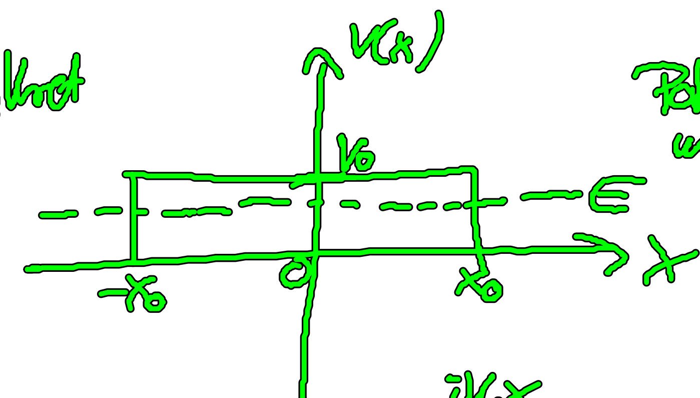
man findet: Die ~~Auf~~ Aufenthalts- → Übung
wahrscheinlichkeit $|\varphi(x)|^2$
ist ungleich Null für $x>0$ (und $0<E<V_0$)

konkret $|\varphi(x)|^2 \sim e^{-2\kappa x}$
exponentiell abklingend

~~Elt~~ Das quantenmechanische Teilchen kann also bis zu einem gewissen Grad in das klassisch verbotene Gebiet eindringen!

Konsequenz:
Dünne Potentialwälle können „durchtunnelt" werden!

konkret



Potentialwall mit Höhe V_0 und Breite $2x_0$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ik_0x} + A e^{-ik_0x}, & x<-x_0, \quad k_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \\ B_+ e^{\lambda x} + B e^{-\lambda x}, & |x|<x_0, \quad \lambda = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)} \\ C e^{ik_0x}, & x>x_0 \end{cases}$$

Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$

Für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten ergibt sich

$$T(E) = \frac{4x^2}{4x^2 + (1+x^2)^2 \sinh^2(2\lambda x_0)}$$

mit $x = \frac{\lambda}{k_0} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$

$$R(E) = \dots = 1 - T(E)$$

Der „Tunnelstrom" (d.h. der Transmissionskoeffizient) ist ungleich Null!

Grenzwertbetrachtung für $T(E)$

sei $\lambda x_0 = \frac{1}{\hbar} x_0 \sqrt{2m(V_0 - E)} \gg 1$

d.h. sehr breiter Potentialwall (Breite $2x_0$)

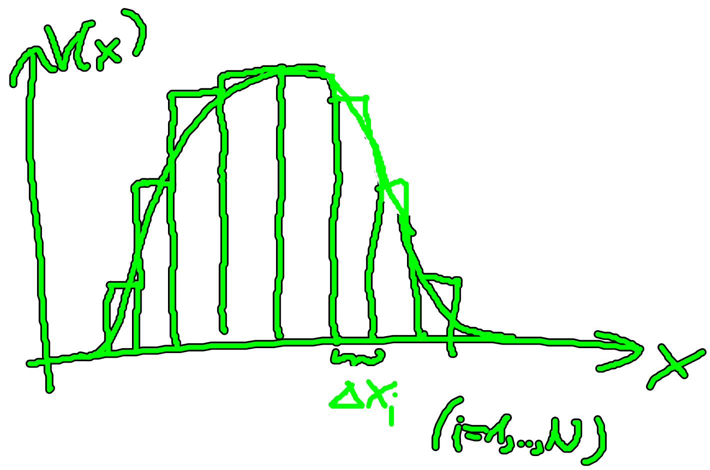
oder sehr hoher Potentialwall im Vergleich zur Einfallsenergie damit $\sinh^2(2\lambda x_0) \approx \frac{1}{4} e^{4\lambda x_0}$

(wg. $\sinh y = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$
$\approx \frac{1}{2} e^{y}$ für $y \gg 0$)

$\Rightarrow T(E) \sim e^{-\frac{4}{\hbar} x_0 \sqrt{2m(V_0 - E)}}$

Die Transmission nimmt exponentiell ab mit der Breite des Walls und mit der Wurzel der effektiven Energiebarriere! $V_0 - E$

Beschreibung realistischer Potentialwälle?



ersetze den kontinuierlichen Potential $V(x)$ durch eine Anzahl von N Rechtecken

$\Rightarrow$ N-faches Tunneln durch Rechteckwälle verschiedener Höhe

$$j_d^{(N)} = T_N \, j_d^{(N-1)} = \dots = T_N T_{N-1} T_{N-2} \cdots T_1 \, j_0$$

j_0: von links einfallender Strom

~~D.h. T(E)~~

Insgesamt:

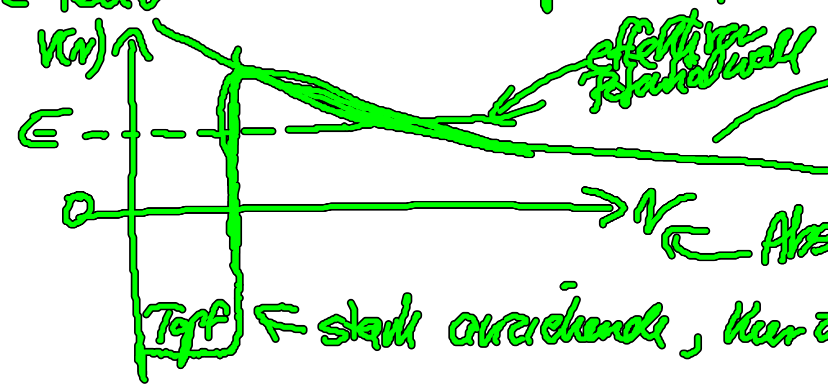
$$T(E) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V(x_i)-E)}\,\Delta x_i}$$

mit $V(x_i)$: Höhe des Rechtecks i

Δx_i: Breite " "

Beispiel: α-Radioaktivität

α-Teilchen: 2-fach positiv geladenes Teilchen



III. Formalisierung der Quantenmechanik

III.1. Zustandsvektoren im Hilbertraum

Vorbemerkungen

Fouriertransformation

$$\psi(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{p}\; \tilde{\varphi}(\underline{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

Wellenfunktion

beschreibt „Zustand" des Teilchens in der Ortsdarstellung
„$\underline{r}$-Darstellung"

$$\hat{\varphi}(\underline{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{r}\; \psi(\underline{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

Impulswellenfunktion

„Zustand in Impulsdarstellung"
$\underline{p}$-Darstellung

Betrachte im folgenden die Funktionen $\psi(\underline{r})$ und $\tilde{\varphi}(\underline{p})$ als Projektionen eines abstrakten Zustandsvektors $|\psi\rangle$ ← Dirac'sche „ket"-Vektoren

auf die $\underline{r}$- bzw $\underline{p}$-Darstellung.

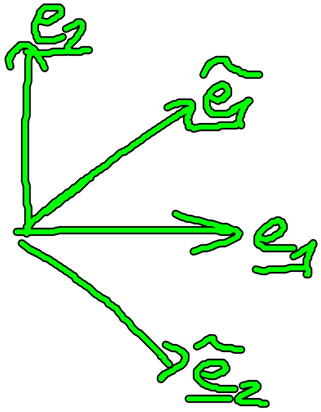
Letztere haben die Funktion einer Basis (des Hilbertraums)

Veranschaulichung:
betrachte gewöhnlichen 2-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Basis

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

$\{\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2\}$



z.B. $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{\underline{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\underline{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zerlegung eines Vektors $\underline{a}$ bzgl. dieser Basen

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{2} a_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^{2} \hat{a}_i \hat{\underline{e}}_i$$

mit $a_i = \underline{a} \cdot \underline{e}_i$, $\hat{a}_i = \underline{a} \cdot \hat{\underline{e}}_i$

Die Komponenten von $\underline{a}$ sind basisabhängig. Man erhält sie durch Projektion – d.h. durch ein Skalarprodukt

Neue Schreibweise:

$\underline{a} \longrightarrow |\underline{a}\rangle$

$\underline{e}_i \longrightarrow |\underline{e}_i\rangle$

$\underline{e}_i \cdot \underline{a} \longrightarrow \langle \underline{e}_i | \underline{a} \rangle = a_i$

„bracket" (Klammer)

$\langle \underline{e}_i |$ $\quad$ $|\underline{a}\rangle$

„bra-Vektor" „ket-Vektor"

Dann gilt:

$$|\underline{a}\rangle = \sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle \underbrace{\langle \underline{e}_i | \underline{a}\rangle}_{a_i} = \sum_{i=1}^{2} |\hat{\underline{e}}_i\rangle \underbrace{\langle \hat{\underline{e}}_i | \underline{a}\rangle}_{\tilde{a}_i}$$

Man sieht aus $|\underline{a}\rangle = \sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle\langle \underline{e}_i|\underline{a}\rangle$

$$\sum_{i=1}^{2} |\underline{e}_i\rangle\langle \underline{e}_i| = \mathbb{1}$$ Einheitsoperator

$$\left(\mathbb{1} |\psi\rangle = |\psi\rangle \right)$$

$$\sum_{i=1}^{2} |\hat{\underline{e}}_i\rangle\langle \hat{\underline{e}}_i| = \mathbb{1}$$

„Vollständigkeitsrelationen", die zeigen, daß die $|\underline{e}_i\rangle$ bzw $|\hat{\underline{e}}_i\rangle$ den Raum vollständig aufspannen

Übertragung der neuen Notation auf die Orts- und Impulsdarstellung in der Quantenmechanik ?

$$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$$

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p | \psi \rangle$$

mit $|\psi\rangle$ abstrakter Zustandsvektor

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Projektion von } |\psi\rangle \text{ auf die jeweilige Basis}}$$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ Hilbertraum

$\Longleftrightarrow$ Raum, in dem die $|\psi\rangle$ „leben"

Vollständigkeitsrelationen für die $\underline{r}$- bzw. und die p-Basis.

$$\int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}| = \hat{1}$$

$$\int dp\, |p\rangle\langle p| = \hat{1}$$

$\left(\text{Vektor im } \mathbb{R}^2 \quad \sum_{i=1}^{2} |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{1} \right)$

Die Anwesenheit der Integrale (anstatt von Summen) zeigt, dass die $\underline{r}$- und p-Basis „kontinuierliche" Basen sind

$$\boxed{\sum\!\!\!\!\!\!\int |c\rangle\langle c| = \hat{1}}$$

Mit diesen Relationen kann man z.B. schreiben (Zerlegung nach einer Basis)

$$|\psi\rangle = \underbrace{\hat{1}}_{\text{Einschieben einer Eins}} |\psi\rangle = \int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}|\psi\rangle = \int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\, \psi(\underline{r})$$

analog

$$|\psi\rangle = \hat{1}\,|\psi\rangle$$

$$= \int dp\, |p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

$$= \int dp\, |p\rangle\, \tilde{\psi}(p)$$

<u>Basiswechsel</u> (von Orts- in die Impulsdarstellung)

Im gewöhnlichen Raum $\mathbb{R}^2$

$$a_j = \underline{e}_j \cdot \underline{a} = \underline{e}_j \cdot \sum_{i=1}^{2} \underline{\tilde{e}}_i\, \tilde{a}_i = \sum_{i=1}^{2} (\underline{e}_j \cdot \underline{\tilde{e}}_i)\, \tilde{a}_i$$

$$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle = \underbrace{\langle \underline{r}|\hat{1}\psi\rangle}_{\text{Einschieben einer Eins}} = \langle \underline{r}|\underbrace{\int dp\, |p\rangle\langle p|}_{\hat{1}}\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$= \int dp\, \langle \underline{r}|p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

$$= \int dp\, \langle \underline{r}|p\rangle\, \tilde{\psi}(p) \quad (*)$$

Vergleiche das mit dem früher hergeleiteten Zusammenhang:

$$\psi(\underline{r}) \overset{!}{=} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int dp\, e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\, \tilde{\psi}(p)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{r} | p \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i/\hbar\, p \cdot \underline{r}}$$ ebene Welle!

Skalarprodukt der Vektoren zwei verschiedener Basen des Hilbertraumes!

analog

$$\varphi(p) = \langle p | \psi \rangle = \langle p | \hat{1}\, \psi \rangle$$

$$= \langle p | \int d\underline{r}\, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r} | \psi \rangle$$

$$= \int d\underline{r}\, \langle p | \underline{r} \rangle\, \psi(\underline{r}) \quad (**)$$

Vergleich mit $\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\underline{r}\, e^{-i/\hbar\, p\cdot \underline{r}}\, \psi(\underline{r})$

$$\Rightarrow \langle p | \underline{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i/\hbar\, p \cdot \underline{r}}$$

$$= \langle \underline{r} | p \rangle^*$$

II.2. Axiome des Hilbertraums $\mathcal{H}$

i) $\mathcal{H}$ ist ein linearer Vektorraum

Bedeutung: $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ Vektoren in $\mathcal{H}$

$\Rightarrow |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ ist auch Element von $\mathcal{H}$

$$\underbrace{\lambda_1 |\psi_1\rangle}_{\substack{\text{Vektor „parallel"} \\ \text{zu } |\psi_1\rangle}} + \lambda_2 |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$$