

Anmerkung zur gestrigen VL:

betrachte zwei hermitesche Operatoren \hat{F}, \hat{G}

$$[\hat{F}, \hat{G}] = 0$$

- gemeinsame EZ
 - gleichzeitig stark messbar!
- $$\Delta F = 0, \Delta G = 0$$

Vollständiger Satz kommutierender Observablen

z.B. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$
(drei)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$$

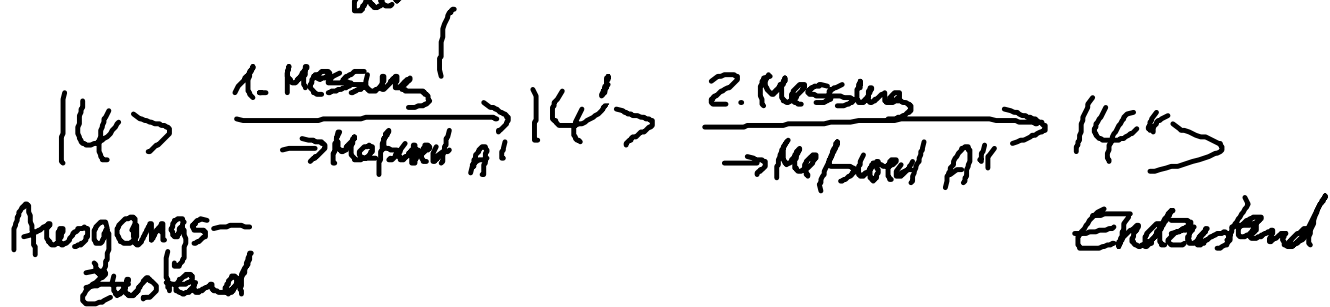
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ bilden vollständigen Satz

(man kann keine weiteren unabhängige Operatoren finden, die mit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ kommutieren!)

⇒ Die gemeinsamen EZ bilden Basis des zugehörigen Hilbertraums!

b) Einfluss der Messung auf den Zustand

der Observablen A



„Experimentell“: $A'' = A'$

Streuung verschwindet bei der 2. Messung!

$\Rightarrow |\psi'\rangle$ muss ein EZ von \hat{A}' und $A' = A''$
ist der zugehörige Eigenwert!

Folgerungen

i) Auch bei einem beliebigen Ausgangszustand $|\psi\rangle$ sind die

überhaupt möglichen Messwerte von A
gerade die Eigenwerte des zugehörigen
Operators \hat{A}

ii) Durch die Messung verändert sich der Zustand
des Systems!! (Wechselwirkung zwischen
System und dem Messapparat!)

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = |\psi''\rangle$$
$$\text{mit } \hat{A}|\psi'\rangle = A'|\psi'\rangle$$
$$= A''|\psi'\rangle$$

„Reduktion des Zustandsvektors“ durch die Messung!

iii) Erwartungswert von \hat{A} (d.h. das Ergebnis vieler Messungen mit
identischem Ausgangszustand)

\Rightarrow Erwartungswert als ~~erre~~ ein
 \uparrow Mittelwert über die gemessenen
aus i) Eigenwerte!

c) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Messwertes

Motivation:

Nur falls der Ausgangszustand schon ein EZ ist, wird mit Sicherheit der zugehörige EW gemessen

→ ausserdem nur Angabe einer Wahrscheinlichkeit möglich:

Schreibe dazu den Erwartungswert um:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

benutze: $\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle$

mit $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$

$$\sum_{n=1}^M |n\rangle \langle n| = \hat{1}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^M \sum_{n'=1}^M \langle \psi | n \rangle \underbrace{\langle n | \hat{A} | n' \rangle}_{a_{n'} \langle n | n' \rangle} \langle n' | \psi \rangle$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{a_{n'} \delta_{nn'}}$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^M a_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle$$

↑
Eigenwert

Erinnerung:
Erwartungswert $\hat{=}$
Mittelwert über
die Eigenwerte!

⇒ definiere

$$\boxed{w_n = \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle} \\ = |\langle n | \psi \rangle|^2 \quad (*)$$

Wahrscheinlichkeit des
~~Auftritts~~ Auftretens des Messwertes a_n

Bemerkungen:

- (*) ist konsistent mit unserer Definition der Aufenthaltswahrscheinl.

$$g(\underline{n}) = \psi^*(\underline{n}) \psi(\underline{n}) = \langle \underline{n} | \psi \rangle \langle \psi | \underline{n} \rangle \\ = |\langle \underline{n} | \psi \rangle|^2$$

- Umschreiben von (*)

Definiere dazu Projektionsoperator

$$\hat{P}_n = |n\rangle \langle n| \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^M \hat{P}_n = \hat{1} \right)$$

(falls die $|n\rangle$'s eine Basis bilden!)

es folgt:

$$\hat{P}_n |m\rangle = |n\rangle \langle n | m \rangle = \delta_{nm} |n\rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ |n\rangle & m = n \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{P}_n$ "beantwortet" die Frage:
Ist das System im Zustand $|n\rangle$?

außerdem:

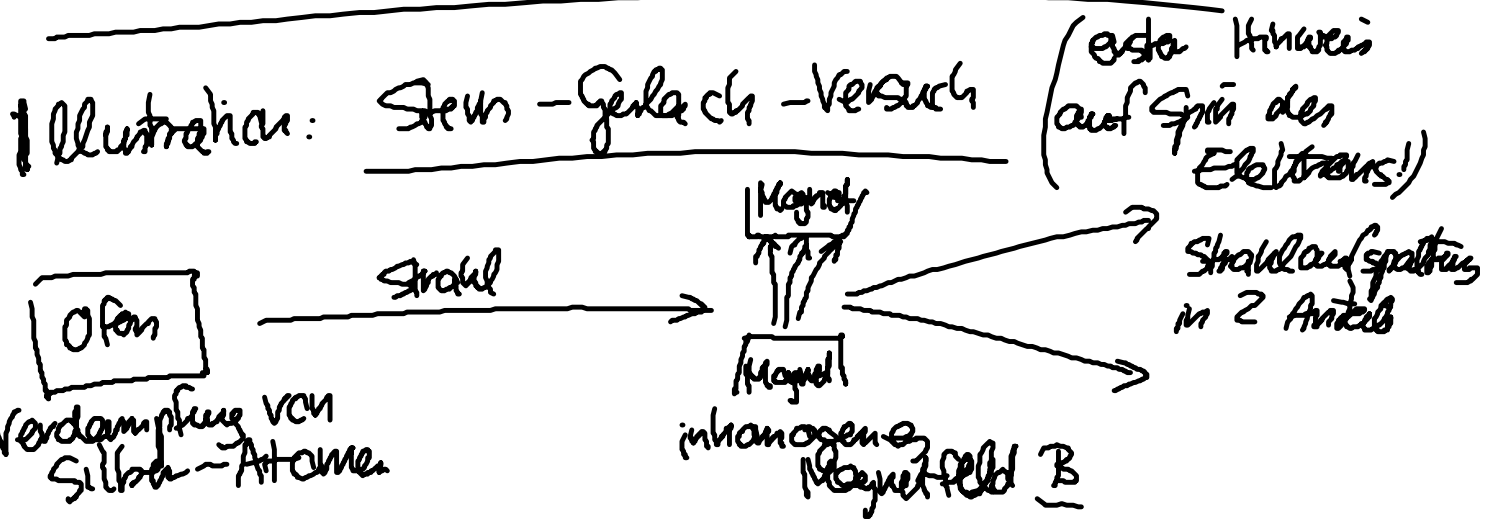
$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \sum_n a_n \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n \langle \hat{P}_n \rangle$$

mit $\langle \hat{P}_n \rangle = \langle \psi | \hat{P}_n | \psi \rangle$

Vergleich mit vorherigem Ausdruck

$$\omega_n = \langle \hat{P}_n \rangle = |\langle n | \psi \rangle|^2$$



Was passiert physikalisch?

Jedes der verdampften Silberatome ist durch ein magnetisches Moment

hier: $\underline{\mu} \sim \underline{L}^S$ gekennzeichneter
 magnet. Moment Drehimpuls
 des Spins

- Vor Eintritt in das Magnetfeld \underline{B} sind die Richtungen der magnet. Momente regellos verteilt
- \underline{B} -Feld führt jetzt zu einer Richtungsquantelung!
 des Spin-Drehimpulses \underline{L}^S
 d.h. die Projektion von \underline{L}^S auf die Feldrichtung kann nur
 diskrete Werte annehmen!

Hier: Fokus auf Spin
 $L_z^S = \pm \frac{\hbar}{2}$ (Annahme
 \underline{B} hat
 z -Richtung!)

Inhomogenität des Feldes
 \rightarrow Aufspaltung des Strahls

Kraft auf ein magnet. Moment

$$\underline{F} = \nabla(\underline{\mu} \cdot \underline{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$$

\Rightarrow Die beiden Strahlen entsprechen gerade den beiden Mengen aus Teilchen mit $L_z^S = +\frac{\hbar}{2}$
 bzw. $-\frac{\hbar}{2}$ $\mu_z \sim L_z^S$

Beschreibung durch Quantentheorie von Messungen

- Die beiden Strahlen nach Durchlaufen des B -Feldes entsprechen gerade den Eigenzuständen $|\Phi_+\rangle$, $|\Phi_-\rangle$ des Spin-Drehimpulses L_z^S zu den Eigenwerten $L_z^S = \pm \frac{\hbar}{2}$

„Reduktion“ des Zustands durch die Messung

- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Messwertes $w_+ = w_{+\frac{\hbar}{2}} = |\langle \Psi | \Phi_+ \rangle|^2$, $w_- = |\langle \Psi | \Phi_- \rangle|^2$

III.7. Die Axiome der Quantenmechanik

- 1) Zustand des quantenmechanischen Systems \rightarrow Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ im Hilbertraum
- 2) Physikalische Observable (Meßgröße) A \rightarrow hermiteschen Operator \hat{A} ($\hat{A}^\dagger = \hat{A}$)

3) Messungen

i) Erwartungswert $\hat{=}$ Mittelwert über vielen Einzelmessungen mit identischen Ausgangszustände $|\psi\rangle$

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_n a_n w_n \quad \text{mit } w_n = |\langle \psi | \psi_n \rangle|^2$$

ii) Die möglichen Messwerte bei einer Einzelmessung sind gerade die Eigenwerte a_n

iii) Zustandsreduktion durch die Messung
 $|\psi\rangle \rightarrow |\psi_n\rangle$
Eigenzustand!

4) Zeitentwicklung der Zustände: Schrödinger-Gleichung
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$

IV. Harmonischer Oszillator

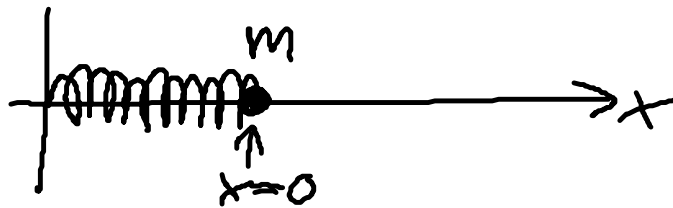
\rightarrow Anwendung des abstrakten Formalismus

Beachte Oszillator in einer Raumdimension
(x -Richtung)

Klassisch:

Teilchen mit Masse m und Impuls $p = m\dot{x}$ ($\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$)
unter Einfluss einer rücktreibenden Kraft

$$F = -kx \quad (k > 0 \text{ Federkonstante})$$



potentielle Energie:

$$V(x) = - \int_0^x dx' F(x') = \frac{k}{2} x^2$$

$$(F = -\frac{dV}{dx})$$

Hamiltonfunktion:

$$H = H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$$

Konservatives System
→ Energieerhaltung

$$= E \quad \text{Energie}$$

$$= \text{const}$$

BWGL (Newton)

$$m\ddot{x} = F = -kx$$

Konstante (Anfangsbedingungen)
 $-i\omega_0 t$

$$\Rightarrow x(t) = C e$$

harmonische Schwingung

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Schwingungsfrequenz

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}$$

Quantenmechanische Behandlung :

Konstruktion des Hamiltonoperators \hat{H}

$$p \rightarrow \hat{p}, \quad x \rightarrow \hat{x}$$

„Quantisierung“

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -\frac{\hbar}{i} \hat{1}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2$$

Aufgabe : Bestimmung des Spektrums von \hat{H}

d.h. Bestimmung der
Energie-Eigenwerte und
Eigenzustände

(\Leftrightarrow Lösung der
zeitunabh. SG)

• Wellenfunktionen ⁱⁿ der Ortsdarstellung

Anwendungen:

- Phononen (Gitterschwingungen) im Festkörper
- Photonen (Lichtquanten)
- Vibrationschwingung von Molekülen

Formale Lösung des Eigenwertproblems von \hat{H}

benutze dazu Leitoperatoren

(Erzeuger- und Vernichtungsoperatoren)

Definiere:

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p}$$

„Absteiger“
„Vernichter“

$$\hat{b}^+ = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p}$$

„Aufsteiger“
„Erzeuger“

\hat{b}, \hat{b}^+ sind nicht hermitesch!

$$\hat{b}^+ \neq \hat{b}$$

Es gilt:

$$\hat{b} + \hat{b}^\dagger = 2 \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} \iff \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$$

$$\hat{b} - \hat{b}^\dagger = 2 \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p} \iff \hat{p} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}\hat{b}^\dagger &= \frac{m\omega_0}{2\hbar} \hat{x}^2 - \frac{i}{2\hbar} \hat{x}\hat{p} + \frac{i}{2\hbar} \hat{p}\hat{x} + \frac{1}{2\hbar m\omega_0} \hat{p}^2 \\ &= \frac{m\omega_0}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{1}{2\hbar m\omega_0} \hat{p}^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})}_{[\hat{p}, \hat{x}] = -\frac{\hbar}{i} \mathbb{1}} \end{aligned}$$

$$\hat{b}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega_0} \underbrace{\left(\frac{m}{2} \omega_0^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \right)}_{\hat{H}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \hat{b}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{H} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \quad !$$

analog:

$$\hat{b}^\dagger\hat{b} = \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{H} - \frac{1}{2} \mathbb{1}$$