Anmerkung zur gestrigen VL:

betrachte zwei hermitesche Operatoren $\hat{F}, \hat{G}$

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0$ · gemeinsame EZ
· gleichzeitig scharf meßbar!
$\Delta F = 0, \Delta G = 0$

Vollständiger Satz kommutierender Observablen

z.B. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ (drei) $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ bilden vollständigen Satz
(man kann keinen weiteren unabhängigen Operator finden, der mit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ vertauscht!)

$\Rightarrow$ Die gemeinsamen EZ bilden Basis des des zugehörigen Hilbertraumes!

b) Einfluß der Messung auf den Zustand

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\to \text{Meßwert } A']{\text{1. Messung der Observablen } A} |\psi'\rangle \xrightarrow[\to \text{Meßwert } A'']{\text{2. Messung}} |\psi''\rangle$$

Ausgangs-Zustand Endzustand

„Experimentell": $A'' = A'$ Streuung verschwindet bei der 2. Messung!

$\Longrightarrow$ $|\psi'\rangle$ muss ein EZ von $\hat{A}$ und $A' = A''$ ist der zugehörige Eigenwert !

Folgerungen

i) Auch bei einem beliebigen Ausgangszustand $|\psi\rangle$ sind die überhaupt möglichen Meßwerte von A gerade die Eigenwerte des zugehörigen Operators $\hat{A}$

ii) Durch die Messung verändert sich der Zustand des Systems !! (Wechselwirkung zwischen System und der Meßapparatur !)

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = |\psi''\rangle$$

$$\text{mit } \hat{A}|\psi'\rangle = A'|\psi'\rangle = A''|\psi'\rangle$$

„Reduktion des Zustandsvektors" durch die Messung !

iii) Erwartungswert von $\hat{A}$ (d.h. das Ergebnis vieler Messung mit identischem Ausgangszustand)

$\Longrightarrow$ Erwartungswert als ~~eine~~ ein Mittelwert über die gemessenen Eigenwerte !

$\uparrow$ aus i)

c) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Messwertes

Motivation:

Nur falls der Ausgangszustand schon ein EZ ist, wird mit Sicherheit der zugehörige EW gemessen

$\rightarrow$ ansonsten nur Angabe einer Wahrscheinlichkeit möglich!

Schreibe dazu den Erwartungswert um.

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

benutze: $\hat{A}|n\rangle = a_n |n\rangle$

mit $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$

$$\sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n| = \hat{1}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{1} \hat{A} \hat{1} | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{M} \sum_{n'=1}^{M} \langle \psi | n \rangle \underbrace{\langle n | \hat{A} | n' \rangle}_{\underbrace{a_{n'} \langle n | n' \rangle}_{a_{n'} \delta_{nn'}}} \langle n' | \psi \rangle$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n=1}^{M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenwert}}}{a_n} \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle$$

Erinnerung: Erwartungswert $\hat{=}$ Mittelwert über die Eigenwerte!

$\Rightarrow$ definiere

$$\boxed{\begin{aligned} w_n &= \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= |\langle n|\psi\rangle|^2 \end{aligned}} \quad (*)$$

Wahrscheinlichkeit des ~~Auftet~~ Auftretens des Meßwertes a_n

Bemerkungen:

- (*) ist konsistent mit unserer Definition der Aufenthaltswahrscheinl.

$$\rho(\underline{r}) = \psi^*(\underline{r})\,\psi(\underline{r}) = \langle\underline{r}|\psi\rangle\langle\psi|\underline{r}\rangle$$
$$= |\langle\underline{r}|\psi\rangle|^2$$

- Umschreiben von (*)

Definiere dazu Projektionsoperator

$$\hat{P}_n = |n\rangle\langle n| \qquad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{M} \hat{P}_n = \hat{1}\right.$$

falls die $|n\rangle$'s eine Basis bilden!)

es folgt:

$$\hat{P}_n|m\rangle = |n\rangle\langle n|m\rangle = \delta_{nm}|n\rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ |n\rangle & m = n \end{cases}$$

⇒ $\hat{P}_n$ „beantwortet" die Frage: „Ist das System im Zustand $|n\rangle$?"

außerdem:

$$\langle \hat{A}\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \sum_n a_n \langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle$$

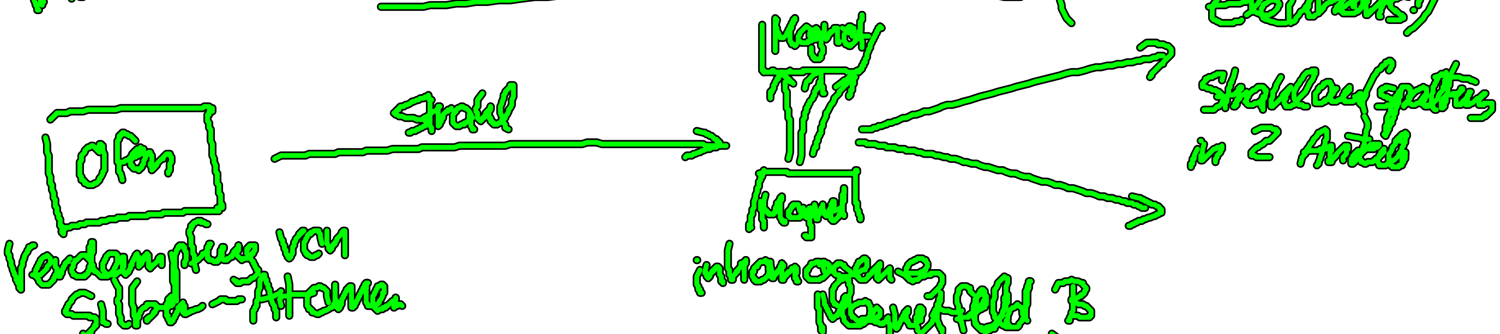
$$\Rightarrow \langle\hat{A}\rangle = \sum_n a_n \langle \hat{P}_n\rangle$$

mit $\langle\hat{P}_n\rangle = \langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle$

Vergleich mit vorherigem Ausdruck

$$w_n = \langle\hat{P}_n\rangle$$
$$= |\langle n|\psi\rangle|^2$$

Illustration: <u>Stern-Gerlach-Versuch</u> (erster Hinweis auf Spin des Elektrons!)



<u>Was passiert physikalisch?</u>

Jedes der verdampften Silberatome ist durch ein magnetisches Moment hier: $\underline{\mu} \sim \underline{\ell}^s$ gekennzeichnet

magnet. Moment — Drehimpuls des Spins

- Vor Eintritt in das Magnetfeld $\underline{B}$ sind die Richtungen der magnet. Momente regellos verteilt
- $\underline{B}$-Feld führt jedoch zu einer Richtungsquantelung! des Spin-Drehimpulses ℓ_s

d.h. die Projektion von ℓ_s auf die Feldrichtung kann nur diskrete Werte annehmen!

Hier: Fokus auf Spin

$$\ell^s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

(Annahme $\underline{B}$ hat z-Richtung!)

Inhomogenität des Feldes

$\Rightarrow$ Aufspaltung des Strahls

Kraft auf ein magnet. Moment

$$\underline{F} = \nabla(\mu \cdot \underline{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die beiden Strahlen entsprechen gerade den beiden Mengen aus Teilchen mit $\ell^s_z = +\frac{\hbar}{2}$ bzw $-\frac{\hbar}{2}$

$\mu_z \sim \ell^s_z$

Beschreibung durch Quantentheorie von Messungen

- Die beiden Strahlen nach Durchlaufen des $\underline{B}$-Feldes entsprechen gerade den Eigenzuständen $|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle$ des Spin-Drehimpulses l_z^s zu den Eigenwerten $l_z^s = \pm\frac{\hbar}{2}$

„Reduktion" des Zustands durch die Messung

- Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Meßwerts $w_+ = w_{+\frac{\hbar}{2}} = |\langle\psi|\phi_+\rangle|^2$, $w_- = |\langle\psi|\phi_-\rangle|^2$

III.7. Die Axiome der Quantenmechanik

1) Zustand des quantenmechanischen Systems

$\longrightarrow$ Zustandsvektor $|\psi\rangle$ im Hilbertraum

2) Physikalische Observable (Meßgröße) A

$\longrightarrow$ hermiteschen Operator $\hat{A}$ $\quad (\hat{A}^\dagger = \hat{A})$

3) Messungen

i) Erwartungswert $\hat{=}$ Mittelwert über vielen Einzelmessungen mit identischen Ausgangszuständen $|\psi\rangle$

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_n a_n w_n \quad \text{mit } w_n = |\langle \psi | n \rangle|^2$$

ii) Die möglichen Meßwerte bei einer Einzelmessung sind grade die Eigenwerte a_n

iii) Zustandsreduktion durch die Messung

$$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle$$

Eigenzustand!

4) Zeitentwicklung der Zustände: Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

IV. Harmonischer Oszillator

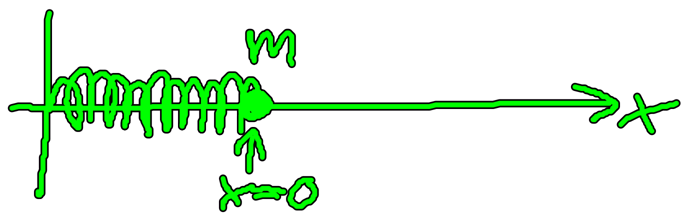
→ Anwendung des abstrakten Formalismus

Betrachte Oszillator in einer Raumdimension (x-Richtung)

<u>Klassisch:</u>

Teilchen mit Masse m und Impuls $p = m\dot{x}$ $\quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v\right)$
unter Einfluss einer rücktreibenden Kraft

$$F = -kx \quad (k > 0 \text{ Federkonstante})$$



potentielle Energie:

$$V(x) = -\int_0^x dx' F(x') = \frac{k}{2}x^2$$

$$\left(F = -\frac{dV}{dx}\right)$$

Hamiltonfunktion:

$$H = H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

konservatives System → Energieerhaltung

$$= E \quad \text{Energie}$$
$$= \text{const}$$

BWGL (Newton) $\quad m\ddot{x} = F = -kx$

Konstante (Anfangsbedingungen)

$$\Rightarrow x(t) = C e^{-i\omega_0 t}$$

harmonische Schwingung

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Schwingungsfrequenz

$$\rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}$$

Quantenmechanische Behandlung :

Konstruktion des Hamiltonoperators $\hat{H}$

$$p \rightarrow \hat{p} \quad , \quad x \rightarrow \hat{x}$$

„Quantisierung"

$$[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \hat{1}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2$$

<u>Aufgabe</u> : Bestimmung des Spektrums von $\hat{H}$

d.h. Bestimmung der
Energie-Eigenwerte und
Eigenzustände

($\Leftrightarrow$ Lösung der
zeitunabh. SG)

- Wellenfunktion(en) der Ortsdarstellung

Anwendungen:

- Phononen (Gitterschwingungen) im Festkörper
- Photonen (Lichtquanten)
- Vibrationsschwingungen von Molekülen

Formale Lösung des Eigenwertproblems von $\hat{H}$

benutze dazu <u>Leiteroperatoren</u>

(Erzeuger- und Vernichteroperatoren)

Definiere:

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}$$

„Absteiger"
„Vernichter"

Begründung später

$$\hat{b}^+ = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p}$$

„Aufsteiger"
„Erzeuger"

$\hat{b}, \hat{b}^+$ sind <u>nicht</u> hermitesch!

$$\hat{b}^+ \neq \hat{b}$$

Es gilt:

$$\hat{b} + \hat{b}^+ = 2\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\,\hat{x} \iff \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\,(\hat{b}+\hat{b}^+)$$

$$\hat{b} - \hat{b}^+ = 2\frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\,\hat{p} \iff \hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\,(\hat{b}-\hat{b}^+)$$

$$\hat{b}\hat{b}^+ = \frac{m\omega_0}{2\hbar}\hat{x}^2 - \frac{i}{2\hbar}\hat{x}\hat{p} + \frac{i}{2\hbar}\hat{p}\hat{x} + \frac{1}{2\hbar m\omega_0}\hat{p}^2$$

$$= \frac{m\omega_0}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2\hbar m\omega_0}\hat{p}^2 + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})}_{[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{i}\mathbb{1}}$$

$$\hat{b}\hat{b}^+ = \frac{1}{\hbar\omega_0}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\omega_0^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m}\right)}_{\hat{H}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \hat{b}\hat{b}^+ = \frac{1}{\hbar\omega_0}\hat{H} + \frac{1}{2}\mathbb{1} \qquad !$$

analog:

$$\hat{b}^+\hat{b} = \frac{1}{\hbar\omega_0}\hat{H} - \frac{1}{2}\mathbb{1}$$