

Harmonische Oszillat

Klass: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$
(1d)

qua: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2$ $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \hat{1}$

IV.1. Formale Lösung des Eigenwertproblems von \hat{H} durch Ladaoperatorn

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p}$$

Absteiger / Vernichte

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p}$$

Aufsteiger / Erzeuge

\hat{b} ist also nicht hermitisch!

Produkt:

$$\begin{aligned} \hat{b} \hat{b}^\dagger &= \dots = \frac{1}{\hbar\omega_0} \left(\frac{m}{2} \omega_0^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) + \frac{1}{2} \hat{1} \\ &= \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{H} + \frac{1}{2} \hat{1} \end{aligned}$$

analog:

$$\hat{b}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{\hbar\omega_0} \hat{H} - \frac{1}{2} \hat{1}$$

Folgerung: • $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = \hat{1}$

• $\hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b} = \frac{2}{\hbar\omega_0} \hat{H}$

$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\underbrace{\hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}}_{\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{1}}) = \frac{\hbar\omega_0}{2} (\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{1} + \hat{b}^\dagger\hat{b})$

$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \hbar\omega_0 (\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2} \hat{1})}$

definiere noch:

$\hat{N} = \hat{b}^\dagger\hat{b}$

„Besetzungszahl-Operator“
 „Teilchenzahl-Operator“

\hat{N} ist hermitisch:

$\hat{N}^\dagger = (\hat{b}^\dagger\hat{b})^\dagger = \hat{b}^\dagger\hat{b} = \hat{N}$

$\boxed{(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger}$

Einsetzen:

$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega_0 (\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{1})} \quad (*)$

aus (*) sieht man sofort: $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$!

da $[\hat{N}, \hat{b}] = 0$
 und $[\hat{N}, \hat{b}^\dagger] = 0$

$\Rightarrow \hat{H}$ und \hat{N} haben ein gemeinsames System aus Eigenzuständen!

also: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$
 \uparrow \nwarrow
 Eigenzustand \nwarrow Eigenwert

(Annahme: Eigenwerte sind nicht entartet und diskret, d.h. $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{H}|n\rangle &= \hbar\omega_0 \hat{N}|n\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{1}|n\rangle \\ &= \hbar\omega_0 n|n\rangle + \frac{\hbar\omega_0}{2}|n\rangle \\ &= \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \end{aligned}$$

definiere: $E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$
 \nwarrow Energieeigenwert des harmon. Oszillators

Zu lösen: Eigenwertproblem
 $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

Behauptung: Die Zustände $|\downarrow n\rangle$ und $|\uparrow n\rangle$ sind ebenfalls Eigenzustände von \hat{N} (bzw. \hat{H})!

Beweis

i) zeige das zunächst für $|\hat{b}_n\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{N} \hat{b} |n\rangle &\leftarrow \text{NR: } [\hat{b}, \hat{N}] = \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} \\ &= (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1) \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} \\ &= \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad \underline{[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1} \\ &= \hat{b} \\ &= \hat{b} \hat{N} |n\rangle - \hat{b} |n\rangle \\ &= n \hat{b} |n\rangle - \hat{b} |n\rangle \\ &= (n-1) \hat{b} |n\rangle \end{aligned}$$

also $\hat{N} (|\hat{b}_n\rangle) = (n-1) (|\hat{b}_n\rangle)$

\Rightarrow Beh. ! $|\hat{b}_n\rangle$ ist Eigenl.
zum Eigenwert $n-1$!

schreibe: $|\hat{b}_n\rangle = \alpha |n-1\rangle$ (**)
mit α Normierungsfaktor

Bestimmung von α :

$$\begin{aligned} \langle n-1 | n-1 \rangle &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{\alpha^2} \langle \hat{b}_n | \hat{b}_n \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \langle n | \hat{b}^\dagger \hat{b} |n\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha^2} n \frac{\langle n | n \rangle}{1} = \frac{n}{\alpha^2} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Einsetzen in (**)

$$\boxed{|\hat{b}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} |n-1\rangle}$$

außerdem:

$$\hat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$$

$$\boxed{\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle}$$

Zugehörige Energie:

$$\begin{aligned} E_{n-1} &= \hbar\omega_0 \left(n-1 - \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0 \left(n - \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega_0 \\ &= E_n - \hbar\omega_0 \end{aligned}$$

man sieht leicht hier: Das Spektrum von \hat{H} ist quantisiert (diskret)
Abstand zweier benachbarter Energien ist $\hbar\omega_0$

(c) Zeige, dass auch $\hat{b}^+|n\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{N} bzw. \hat{H} ist

$$\begin{aligned} \hat{N} \hat{b}^+|n\rangle & \quad \text{benutze} \\ & \quad [\hat{b}^+, \hat{N}] = -\hat{b}^+ \\ &= (\hat{b}^+ \hat{N} + \hat{b}^+) |n\rangle \\ &= n \hat{b}^+|n\rangle + \hat{b}^+|n\rangle = (n+1) \hat{b}^+|n\rangle \\ \Rightarrow \hat{N}(\hat{b}^+|n\rangle) &= (n+1)(\hat{b}^+|n\rangle) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \hat{b}^+|n\rangle$ ist faktorieller Eigenzustand von \hat{N} zum Eigenwert $n+1$!

$$\Rightarrow \text{Ansatz: } \hat{b}^+|n\rangle = \beta|n+1\rangle$$

Normierung

$$\begin{aligned}\langle n+1 | n+1 \rangle &= \frac{1}{\beta^2} \langle \hat{b}^\dagger n | \hat{b}^\dagger n \rangle \\ &= \frac{1}{\beta^2} \langle n | \underbrace{\hat{b} \hat{b}^\dagger}_{N+1} | n \rangle \\ &= \frac{n+1}{\beta^2} \stackrel{!}{=} 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{b} \hat{b}^\dagger &= \hat{b}^\dagger \hat{b} + 1 \\ &= N + 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{n+1}$$

$$\text{und } \boxed{\hat{b}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle}$$

Zugehörige Energie:

$$E_{n+1} = \hbar \omega_0 \left(n+1 - \frac{1}{2} \right) = E_n + \hbar \omega_0$$

\hat{b}^\dagger erzeugt also einen neuen Eigenzustand
zum Energieeigenwert E_{n+1}
(bzw. zum E_{n+1} des Operators N)

Zusammenfassend:

Mit Hilfe der Operatoren \hat{b} und \hat{b}^\dagger kann man
im Raum der Eigenzustände von Zustand zu
Zustand klettern \rightarrow „Leitungsoperatoren“

Existenz eines Grundzustandes

Frage: Kann man durch Anwenden des Abschießgerätes
 \hat{b} Eigenzustände mit beliebig hoher Energie erzeugen?

$$(\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle)$$

Antwort: Nein!

Grund:

$$\begin{aligned} \text{einerseits: } \hbar\omega_0 \langle n | \hat{N} | n \rangle &= \hbar\omega_0 \langle n | \hat{b}^\dagger \hat{b} | n \rangle \\ &= \hbar\omega_0 \underbrace{\langle \hat{b}n | \hat{b}n \rangle}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\geq 0$$

(Skalarprodukt
eines Zustandes
mit sich selbst)

$$\text{andereits: } \hbar\omega_0 \langle n | \hat{N} | n \rangle$$

$$= \langle n | \hat{H} - \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{1} | n \rangle$$

$$= \langle n | \hat{H} | n \rangle - \langle n | \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{1} | n \rangle$$

$$\left| \hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{1} \right) \right.$$

$$\Rightarrow \hbar\omega_0 \langle n | \hat{N} | n \rangle =$$

$$= E_n \frac{\langle n | n \rangle}{1} - \frac{\hbar\omega_0}{2} \langle n | n \rangle$$

$$= E_n - \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Kombiniere:

$$E_n - \frac{\hbar\omega_0}{2} \geq 0$$

\rightarrow

$$E_n \geq \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Es gibt also eine untere Schranke für die Energie
 $\hat{=}$ Es gibt einen Grundzustand!

benutze:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Der Grundzustand ist definiert durch den Eigenwert $n=0$ von \hat{N}

bzw. dem Energieeigenwert

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad \text{von } \hat{H} \quad !$$

Folgerungen für die Zustände

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{b}|1\rangle = \sqrt{1}|0\rangle = |0\rangle$$

\uparrow

Zustand zu $n=1$

\uparrow

Zustand zu $n=0$

(„1. angeregter Zustand“)

$$\hat{b}^n |n\rangle = |0\rangle$$

n -maliges Anwenden des
Abstiegers führt wieder auf
den Grundzustand!

aber:

$$\hat{b}^{n+1} |n\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

(d.h. auch $\hat{b}|0\rangle = 0$)

reflektiert die
Tatsache, dass es eine
untere Schranke für
die Energie gibt!

Konstruktion der angeregten Zustände

$$\hat{b}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Folgerung (s. Übung)

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{b}^+)^n |0\rangle$$

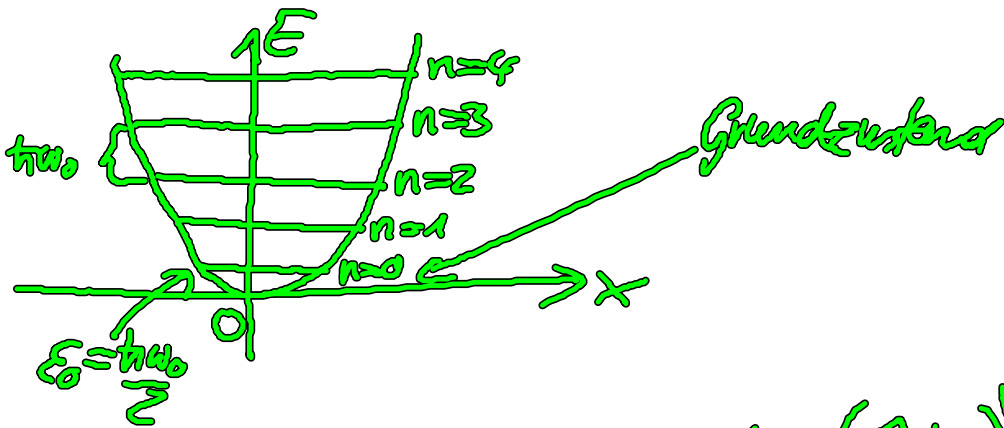
Zusammenfassung der formalen Lösung (algebraische Lösung)

$$\hat{H}|n\rangle = \epsilon_n |n\rangle, \quad \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{N}|n\rangle = n |n\rangle, \quad \epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

dh. Das Spektrum ist diskret und äquidistant

→ da $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_0$
unabhängig
von n



Eigenzustände: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{b}^\dagger)^n |0\rangle$

mit $\langle n | n' \rangle = \delta_{n,n'}$

und $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}$
Vollständigkeitsgleichung

häufig benutzte Sprechweise:

Oszillate als Vielteilchensystem

$|n\rangle$: Zustand mit n „Schwingungsquanten“

Dabei ist ein Schwingungsquant gerade
gerade $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_0$

\hat{b}^+, \hat{b} : Erzeuger bzw. Vernichter eines Schwingquants

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\hat{b}^+|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$\hat{N} = \hat{b}^+ \hat{b}$: Besetzungszahl bzw. Teilchenzahloperator
des Schwingquants

(Photonen (Gitterschwingungen)
Teilchen eines Stellensystems)

Formale Lösung $\hat{=}$ Lösung in Besetzungszahl-Darstellung!

IV.2. Ortsdarstellung

gesucht: Ortsraumwellenfunktion

$$\varphi_n(x) = \langle x | n \rangle$$

(analog zu $\langle n | \varphi \rangle = \langle n | \varphi \rangle$)

betrachte die Wirkung der Ortsoperatoren im Ortsraum

$$\hat{b} \varphi_n(x) = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \hat{p} \right) \varphi_n(x)$$

benutze $\hat{x} \rightarrow x$

$\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$

$$\Rightarrow \hat{b} \varphi_n(x) = \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} x + \frac{\hbar}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \frac{d}{dx} \right) \varphi_n(x) \quad \text{i.d. Ortsdarstellung}$$

Es ist sinnvoll, eine neue Variable einzuführen:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

$$\Rightarrow \hat{b} \varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \varphi_n(\xi)$$

analog:

$$\hat{b}^+ \varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) \varphi_n(\xi)$$