

$\hat{L} = \hat{L} \times \hat{p}$ Drehimpulsoperator

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \hat{L}_k \quad i, j, k \text{ zyklische Indizes}$$

$i, j = x, y, z$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$$

physikalisch entspricht \hat{L}^2 dem Betragquadrat des Drehimpuls

typischerweise betrachtet man \hat{L}^2, \hat{L}_z gemeinsames System von EZ

$$\hat{L}^2 |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle$$
$$\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle$$

Lösung dieses Eigenwertproblems?

Lösung durch Ladderoperatoren. $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$$

VI.2 Lösung des Eigenwertproblems

wir hatten bereits

$$\alpha \geq \beta \geq 0$$

Hermitizität von \hat{L}_z, \hat{L}^2

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$$

Weiteres Vorgehen wie beim harmon. Oszillator

Zeige zunächst, mit $|\alpha, \beta\rangle$ sind auch die Zustände $\hat{L}_{\pm} |\alpha, \beta\rangle$ wieder EZ zu \hat{L}^2 und \hat{L}_z !

$$\hat{L}_z^2(|\alpha, \beta\rangle) \stackrel{\uparrow}{=} \hat{L}_z \hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \alpha (\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle)$$

da $[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = 0$ EW von \hat{L}_z^2 bleibt also ungeändert!

$$\hat{L}_z (\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle) \stackrel{\uparrow}{=} (\hat{L}_z \hat{L}_z \pm \hbar \hat{L}_z) |\alpha, \beta\rangle$$

$[\hat{L}_z, \hat{L}_z] = \pm \hbar \hat{L}_z \rightarrow i$

$$= \beta \hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle \pm \hbar \hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle$$

lautet $\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle$

$$= (\beta \pm \hbar) (\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle)$$

Anwendung von \hat{L}_z erhöht bzw. erniedrigt den Eigenwert von \hat{L}_z um \hbar !

Beacht: Da gleichzeitig $-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$ gelten muß, muß es einen größten bzw. kleinsten EW β_{\max} bzw. β_{\min} geben.

für den gilt:

Aufsteiger $\rightarrow \hat{L}_+ |\alpha, \beta_{\max}\rangle \stackrel{!}{=} 0$

Absteiger $\rightarrow \hat{L}_- |\alpha, \beta_{\min}\rangle \stackrel{!}{=} 0$

Folgerungen:

$$\begin{aligned}\hat{L}_- \underbrace{\hat{L}_+ |\alpha, \beta_{\max}\rangle}_0 &= 0 \\ &= (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \\ &= (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \underbrace{i\hat{L}_x\hat{L}_y - i\hat{L}_y\hat{L}_x}_{i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = -\hbar\hat{L}_z}) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \\ &= (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \\ &= (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z) |\alpha, \beta_{\max}\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = (\alpha - \beta_{\max}^2 - \hbar\beta_{\max}) |\alpha, \beta_{\max}\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta_{\max}^2 + \hbar\beta_{\max}} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 |\alpha, \beta\rangle &= \alpha |\alpha, \beta\rangle \\ \hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle &= \beta |\alpha, \beta\rangle\end{aligned}$$

analog

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ \underbrace{\hat{L}_- |\alpha, \beta_{\min}\rangle}_0 &= 0 \\ &= (\hat{L}_x^2 - \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z) |\alpha, \beta_{\min}\rangle \\ &= (\alpha - \beta_{\min}^2 + \hbar\beta_{\min}) |\alpha, \beta_{\min}\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \beta_{\min}^2 - \hbar\beta_{\min}} \quad (2)$$

① und ② legen β_{\max} und β_{\min} für festes α fest!

Weitere Relationen findet man durch

Verwendung
der Kommutator

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm^n] = \pm n\hbar \hat{L}_\pm^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$!

\hat{L}_\pm^n ist auch wieder $\in \mathbb{E}$!

$$\begin{aligned} \text{denn } \hat{L}_z(\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle) &= \underbrace{(\hat{L}_\pm^n \hat{L}_z \pm n\hbar \hat{L}_\pm^n)}_{\text{Kommutator}} |\alpha, \beta\rangle \\ &= (\beta \pm n\hbar) (\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle) \end{aligned}$$

$$\text{(außerdem: } \hat{L}_z^2(\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle) = \alpha(\hat{L}_\pm^n |\alpha, \beta\rangle))$$

\Downarrow ES muß also ein $n \in \mathbb{N}$
geben mit

$$|\alpha, \beta_{\max}\rangle \stackrel{!}{=} (\hat{L}_+^n) |\alpha, \beta_{\min}\rangle$$

$$\text{Folgerung: } \hat{L}_z |\alpha, \beta_{\max}\rangle \stackrel{!}{=} \hat{L}_z (\hat{L}_+^n |\alpha, \beta_{\min}\rangle)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\max} |\alpha, \beta_{\max}\rangle &= (\hat{L}_+^n \hat{L}_z + n\hbar \hat{L}_+^n) |\alpha, \beta_{\min}\rangle \\ &= (\beta_{\min} + n\hbar) \hat{L}_+^n |\alpha, \beta_{\min}\rangle \\ &= (\beta_{\min} + n\hbar) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \end{aligned}$$

Damit $\beta_{\max} = \beta_{\min} + n \cdot h$ (*)

Kombiniere (*) mit (1) und (2)

$$\underbrace{\beta_{\max}^2 + h \beta_{\max}}_{\alpha} = \underbrace{\beta_{\min}^2 - h \beta_{\min}}_{\alpha}$$

einsetzen in (*)

$$\frac{\beta_{\min}^2 + 2n h \beta_{\min} + n^2 h^2}{\beta_{\max}} + h \beta_{\min} + n h^2 = \beta_{\min}^2 - h \beta_{\min}$$

$$\beta_{\min} \frac{(2n h + h + h)}{2h(n+1)} = -h^2(n^2 + n) = -h^2 n(n+1)$$

$$\Rightarrow \beta_{\min} = \frac{-h^2 n}{2h} = -\frac{n}{2} h$$

Beachte: n ist ganzzahlig ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{folgt } l = \frac{n}{2}$$

l ist ganzzahlig oder halbzahlig

also: $\beta_{\min} = -lh$

Damit

$$\beta_{\max} = \beta_{\min} + nh = -lh + 2lh = \underline{\underline{lh}}$$

$$\alpha = \beta_{\max}^2 - h\beta_{\min} = l^2h^2 + h^2l = l(l+1)h^2$$

Zusammenfassung

i) Die möglichen EW von $\underline{L^2}$ sind

$$\alpha = l(l+1)h^2$$

$$\text{mit } l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

ii) Die möglichen EW von $\underline{L_z}$ sind

$$\beta = mh$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

"Drehimpuls - Quantelung"

Folgerung aus der Kommutativität der Drehimpulsoperatoren $[\underline{L}_i, \underline{L}_j] = i\hbar \underline{L}_k$

Unterschied zur Klasse Hermit, wo die Drehimpuls Komponenten sich nicht gleichzeitig messen lassen!

Es gibt eine sog. "Richtungsantwort"

Zu jedem l kann man die Werte

$-l, -l+1, \dots, +l$ annehmen

$2l+1$ Werte

l ist $(2l+1)$ -fach entartet!

Notation in Zukunft : $|k, l\rangle \rightarrow |l, m\rangle$

$$\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

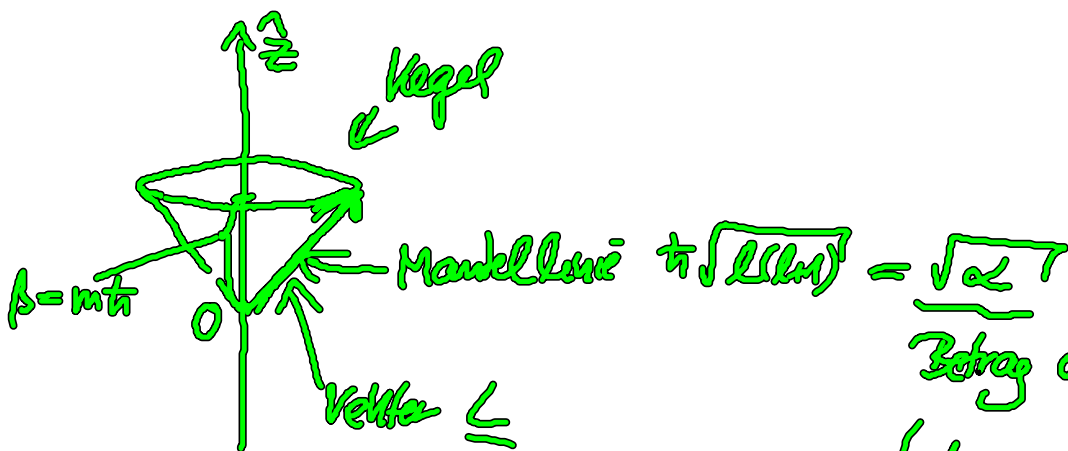
Eigenwert

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad \text{mit } m = -l, \dots, l$$

und l ganz- oder halbzahlig!

Geometrische Veranschaulichung

"halb-klassisches Vektormodell"



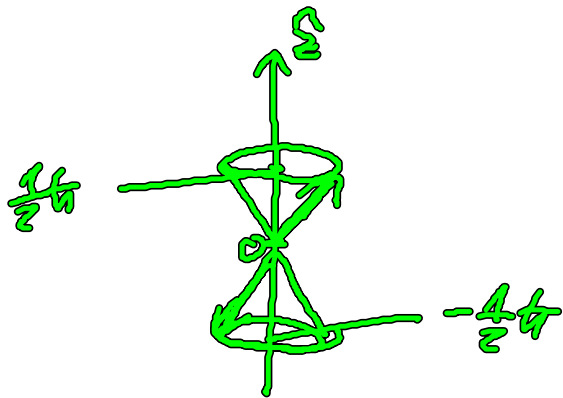
Betrag des Drehimpulses!
(da α der EW zu \hat{L}^2 ist)

\underline{L} präzediert um der z-Achse auf der Mantelfläche der Kegel

Präzession illustriert, dass nicht alle Komponenten von \underline{L} gleichzeitig scharf messbar sind

z.B. $L = \frac{\Delta}{z}$ (relevant für den Spin des Elektronen)

$$m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$



VI.3. Ortsdarstellung der Eigenzustände des Bahndrehimpulses

formaler Übergang

$$\langle r | l, m \rangle =: \psi_{lm}(r)$$

$$\left(\text{analog: } \langle r | \psi \rangle = \psi(r) \right)$$

$$\langle r | \hat{r} | l, m \rangle = r \psi_{lm}(r)$$

$$\langle r | \hat{p} | l, m \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi_{lm}(r)$$

Ortsoperatoren nicht multiplizierbar in der Ortsdarstellung
Impulsoperatoren \rightarrow Gradient

Bahndrehimpuls: $\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{p}}$

$$\rightarrow \underline{\hat{r}} \times \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\Rightarrow \hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Eigenfunktionen?

Satzpunkt: $\hat{L}_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle \quad (m = -l, \dots, +l)$

$$\hat{L}_z \psi_{lm}(\underline{r}) \stackrel{!}{=} m\hbar \psi_{lm}(\underline{r}) \quad (*)$$

Um aus (*) die Funktionen $\psi_{lm}(\underline{r})$ zu bestimmen, ist es einfacher, in Kugelkoordinaten zu arbeiten!
 (r, ϑ, φ)

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Transformation des Gradienten

$$\nabla \rightarrow \nabla \cdot \underline{e}_{x_i}$$

↑
Einheitsvektor in
Kugelkoordinat
($x_i = r, \theta, \varphi$)

$$\underline{e}_{x_i} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i}$$

es ergibt sich:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Kombiniere mit $\underline{\hat{r}} = \left(r \times \frac{1}{r} \nabla \right)$

$$= \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \times \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} (-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \\ \frac{1}{r} (\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$