VI. 6. Magnetisches Moment und Drehimpuls, Zeemann-Effekt

Wie koppelt ein äußeres Magnetfeld an ein Teilchen an?

Klassische E-Dynamik, speziell Magnetostatik
↪ zeitunabhängige Magnetfelder $\underline{B}$, Ströme $\underline{j}$

magnetisches Moment:
⇒ wird erzeugt durch Stromverteilung $\underline{j}$

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int d\underline{r} \left(\underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}) \right)$$

mit $\underline{j}(\underline{r}) = \underbrace{\rho}_{\text{Ladungsdichte}} \underbrace{\underline{v}(\underline{r})}_{\text{Geschwindigkeit}} = \rho \frac{1}{\underbrace{m}_{\text{Masse}}} \underbrace{\underline{p}}_{\text{Impuls}}$

Ankopplung an das äußere Magnetfeld $\underline{B}$

Energie eines magnet. Moments im Feld

$$W = -\underline{m} \cdot \underline{B}$$

klass. Energiedichte

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{m} = -\nabla_{\underline{B}} W}$$

alternative Definition des magnet. Moments!

Quantenmechanisches Analogon?

Betrachte also die Energie eines quantenmechan. Teilchens (H-Atom) im Feld $\underline{B}$, bzw. den zugehörigen Beitrag im Hamiltonian H !

Klassische Mechanik:

Hamiltonfunktion: $H(\underline{r}, p) = \frac{1}{2m}(p - q\underline{A})^2 + V(\underline{r})$

dabei ist q: Ladung

$\underline{A}$: Vektorpotential

mit $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$

Korrespondenzprinzip

$$\left.\begin{array}{l} p \longrightarrow \hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \\ \underline{A}(\underline{r}) \rightarrow \hat{\underline{A}}(\hat{\underline{r}}) \Rightarrow \underline{A}(\underline{r}) \end{array}\right\} \text{in der Ortsdarstellung}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m}\hat{\underline{A}}\hat{p} - \hat{p}\cdot\frac{q}{2m}\hat{\underline{A}} + \frac{q^2}{2m}\hat{\underline{A}}^2 + \underbrace{\hat{V}}_{\text{Potential}}$$

Ortsdarstellung:

$$\hat{H}\psi(\underline{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{q}{2m}\underline{A}\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - \frac{\hbar}{i}\nabla\left(\frac{q}{2m}\underline{A}\cdot\psi\right) + \frac{q^2}{2m}\underline{A}^2\psi + V(\underline{r})\psi$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{q}{2m}\underline{A}\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{2m}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{A})}^{\text{Divergenz}}\psi + \frac{q^2}{2m}\underline{A}^2\psi - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{2m}\underline{A}\cdot\nabla\psi + V(\underline{r})\psi$$

Aus Elektrodynamik:
Es gibt verschiedene „Eichungen" des Vektorpotentials

$\Leftrightarrow$ Transformationen, die das physikalische Feld $\underline{B}$ invariant lassen!

hier: <u>Coulombeichung</u>: $\nabla \cdot \underline{A} = 0$

Divergenz

Damit ergibt sich:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{q}{m}\frac{\hbar}{i}\underline{A}\nabla\psi + \frac{q^2}{2m}\underline{A}^2\psi + V(\underline{r})\psi$$

Masse des Elektrons

spezialisiert auf Elektron: $q = -e_0$, $m = m_e$

Elementarladung

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + \frac{e_0}{m_e}\frac{\hbar}{i}\underline{A}\cdot\nabla\psi + \frac{e_0^2}{2m_e}\underline{A}^2\psi + V(\underline{r})\psi$$

Hamiltonian eines Elektrons im Vektorpotential $\underline{A}$

umschreiben so, daß statt $\underline{A}$ das Feld $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ vorkommt

mit Coulombeichung

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \xleftrightarrow[\nabla\cdot\underline{A}=0]{} \underline{A} = \frac{1}{2}(\underline{B} \times \underline{r})$$

Einsetzen in $\hat{H}$:

linearer Term: $\frac{e_0}{m_e}\frac{\hbar}{i}\underline{A}\cdot\nabla \rightarrow \frac{e_0}{m_e}\underline{A}\cdot\hat{\underline{p}}$

$$= \frac{e_0}{m_e}\cdot\frac{1}{2}(\underline{B}\times\hat{\underline{r}})\cdot\hat{\underline{p}}$$

$$= \frac{e_0}{2m_e}\underline{B}\cdot(\hat{\underline{r}}\times\hat{\underline{p}})$$

$$= \frac{e_0}{2m_e}\underline{B}\cdot\hat{\underline{L}}$$

Bahn-Drehimpuls-operator!

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta + \frac{e_0}{2m_e}\underline{B}\cdot\hat{\underline{L}} + \frac{e_0^2}{8m_e}\underbrace{(\underline{r}\times\underline{B})^2}_{r^2B^2\sin^2\alpha} + V(\underline{r})}$$

$\underline{r}\times\underline{B} = |\underline{r}|\,|\underline{B}|\sin\alpha$

Winkel zw. $\underline{r}$ und $\underline{B}$

man sieht:
Das Magnetfeld koppelt linear an den Drehimpuls!

Frage: Was ist jetzt das magnet. Moment in der QM?

Klassisch: $W = -\underline{m}\cdot\underline{B} \Rightarrow \underline{m} = -\nabla_{\underline{B}} W$

QM: $\hat{H} \mathrel{\hat{=}}$ Energie

$\Rightarrow$ definiere $\boxed{\hat{\underline{\mu}} = -\nabla_{\underline{B}}\hat{H}}$

Operator des magnet. Moments!

Anwenden auf den obigen Ausdruck für $\hat{\mu}$:

$$(*)\quad \boxed{\hat{\underline{\mu}} = -\frac{e_0}{2m_e}\hat{\underline{L}} - \frac{e_0^2}{4m_e} r^2 \sin^2\vartheta\, \underline{B}}$$

~~magn~~ magnet. Moment des Elektrons

<u>Bemerkungen</u>

i) Bahndrehimpuls $\underline{L}$ des Elektrons führt zu einem (permanenten) magnet. Moment, das (wegen der negativen Ladung!) <u>antiparallel</u> zu $\underline{L}$ gerichtet ist!

„permanent", da dieser Term auch für $\underline{B}=0$ existiert!
lineare

ii) Über diesen permanenten Anteil hinaus gibt es noch einen zweiten, „diamagnetischen" Anteil

$\left(-\frac{e_0^2}{4m_e} r^2 \sin^2\vartheta\, \underline{B}\right)$

linear in $\underline{B}$!
$\rightarrow$ verschwindet für $\underline{B}\to 0$

Dieser diamagnetische Term ist für Atome meist vernachlässigbar, da der Vorfaktor $\sim \frac{e_0^2}{4m_e}$ viel kleiner ist als der des permanenten Anteils

Einsetzen des Ausdrucks (*) für $\hat{\mu}$ in $\hat{H}$
unter Vernachlässigung des diamagnetischen Terms

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\underline{r}) \underbrace{- \hat{\underline{\mu}} \cdot \underline{B}}_{\text{„Ankopplung" mit } \hat{\underline{\mu}} = -\frac{e_0}{2m_e}\hat{\underline{L}}}}$$

Hamiltonoperator des Elektrons im äußeren Magnetfeld

formal analog zur klass. Magnetostatik, wo $w = -\underline{m}\cdot\underline{B}$
Energiedichte

Schließlich:
Wie wirkt sich das $\underline{B}$-Feld auf das Spektrum (d.h. die Energie-Eigenwerte) aus?

- $\underline{B} = B\,\underline{e}_z$

$$\Rightarrow -\hat{\underline{\mu}}\cdot\underline{B} = -\hat{\mu}_z B = B\frac{e_0}{2m_e}\hat{L}_z$$

- nehme an, daß $V(\underline{r}) = V(r)$ Zentralpotential (z.B. Coulombpotential)

$$\Rightarrow \quad [\hat{H}, \hat{\underline{L}}^2] = 0$$
$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

Erhaltung des Drehimpulses

Der zusätzliche Term für die Ankopplung an $\underline{B}$ ist linear in $\hat{L}_z$!

$\Longrightarrow$ Dieser Term vertauscht ebenfalls mit $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$!

$\Longrightarrow$ Eigenzustände bleiben ungeändert! (im Vergleich zum Fall $\underline{B}=0$!)

Energie-Eigenwerte?

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mu}_z B \quad \text{mit} \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$$

$$\hat{H}_0 |n,l,m\rangle = E_{nl} |n,l,m\rangle$$

(speziell H-Atom d.h. Coulombpotential $E_{nl} = E_n$)

$$\hat{L}_z |n,l,m\rangle = m\hbar |n,l,m\rangle$$

mit $m = -l, \dots, l$

$$\hat{H} |n,l,m\rangle = (\hat{H}_0 - \hat{\mu}_z B) |n,l,m\rangle$$

$$= \left(\hat{H}_0 + \frac{e_0}{2m_e}\hat{L}_z B\right) |n,l,m\rangle$$

$$= \left(E_{nl} + B\frac{e_0}{2m_e}\hbar m\right) |n,l,m\rangle \quad !$$

also:

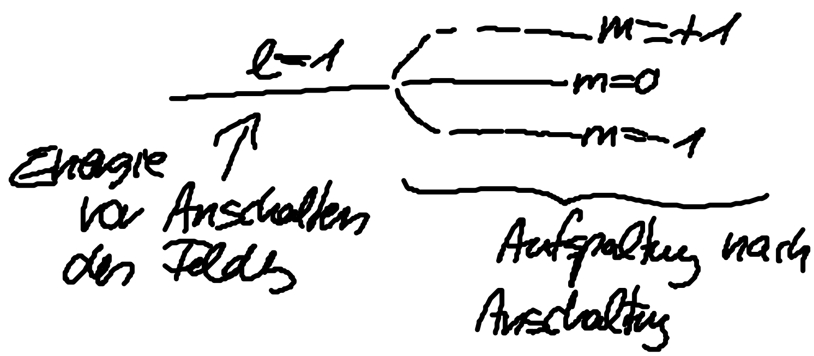
Energieniveaus im äußeren $\underline{B}$-Feld

$$\boxed{\begin{aligned} E &= E_{nl} + \mu_B B m \\ &= E_{nlm} \end{aligned}}$$

mit $\mu_B = \frac{e_0 \hbar}{2 m_e}$ Bohr'sches Magneton

äußere $\underline{B}$-Feld ändert also nichts an den den Eigenzuständen, aber es hebt die Entartung der Energieeigenwerte bzgl. der Quantenzahl m auf!

$\Longleftrightarrow$ Aufspaltung in $(2l+1)$ Niveaus energetisch äquidistant



„Zeeman-Effekt"