

3.2.5 Photonen

Satz gekoppelter Oszillatoren mit Verbindindex $k = (\vec{k}, \lambda(k))$

\vec{k} - Wellenzahl

λ - 2 Polarisationsrichtungen \perp zu \vec{k}

(für jede \vec{k})

$$Z_k = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda(k)} \left(\frac{e^{-\frac{\beta \hbar \omega(k)}{2}}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega(k)}} \right) \quad \left(\text{Beide VL mit:} \right)$$

$$\prod_{\vec{k}} \rightarrow \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda} \quad \left. \right)$$

Zustandsumme für den speziellen Fall des Photonengases mit

der Dispersionsrelation: $\omega_{\lambda}(\vec{k}) = c|\vec{k}| \equiv \omega(\vec{k})$

↑

Kein Faktor von λ

Dispersion hängt nicht v. Polarisation ab, daher:

$$Z_k = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda} \left(\frac{e^{-\frac{\beta \hbar \omega(k)}{2}}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega(k)}} \right)^2$$

$\lambda=1$

geht in
Potenz² über

$$\ln Z_k = -2 \sum_{\vec{k}} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_c k}) - \sum_{\vec{k}} \beta \epsilon_c k$$

↓
bestimmt
frei Energie F

↓
Anteil des Rechenpunkts
Energie, trägt in
„Standardmessg.“ nicht
bei.

trägt bei Ableitg. v. Potentiale
nicht bei, z.B. F.

geht jetzt zu kontinuierlich Limit über

$$\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \quad (\text{großer Kasten, siehe 1. VL})$$

$$\ln Z_k = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_c k})$$

Kugelkoordinaten

Winkelintegration

$$= - \frac{2V \sqrt{4\pi}}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_c k})$$

$\nearrow x$

$x = \beta \epsilon_c k$

$$\sim \frac{1}{(\epsilon_c \beta)^3} \cdot \text{Zahl}$$

\nwarrow nachschlagen

insgesamt

$$\ln Z_k = \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{(\beta \epsilon_c)^3} \sim \frac{1}{\beta^3}$$

$$\rightarrow F = -kT \ln Z \quad \text{freie Energie als thermodynamisch
Potential}$$

$$= - \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{\beta^4} \frac{1}{(\epsilon_c)^3}$$

3.2.5.1. Auswertung der Zustandssumme

a) kanonische Zustandsgleichung:

$$E = - \frac{\partial \ln Z_k}{\partial \beta} = \frac{\pi^2}{15} \frac{V}{(4c)^3} (kT)^4, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Die Beziehung $E \sim T^4$ heißt Stefan-Boltzmann Gesetz.

(komplett anders als bei ideal Gas: $E \sim T$.)

b) Keermische Zustandsgleichung

$$p = - \partial_V F(T, V, N) \quad \uparrow \text{ masselose Gas}$$

$$p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_k = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

Es existiert ein Strahlungsdruck $p \sim T^4$ auf Wand

ist allerdings sehr klein \sim typisch Wert für Sonnenstrahlung.

$$p \approx 10^{-6} \frac{N}{m^2}$$

c) Plancksche Verteilung:

Von oben,
Integral stellen lassen

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_k = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\pi^2} V \int_0^{\infty} dk k^2 \ln (1 - e^{-\beta \hbar c k})$$

Ziel

$$\frac{E}{V} = \int d\omega u(\omega)$$

↑
Spektrale Energiedichte

ω = ck

↑
Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \ln (1 - e^{-\beta \hbar \omega})$$

$$= \frac{1}{\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^2 \underbrace{\frac{\hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}}_{\hbar \omega \cdot f^B(\hbar \omega)}$$

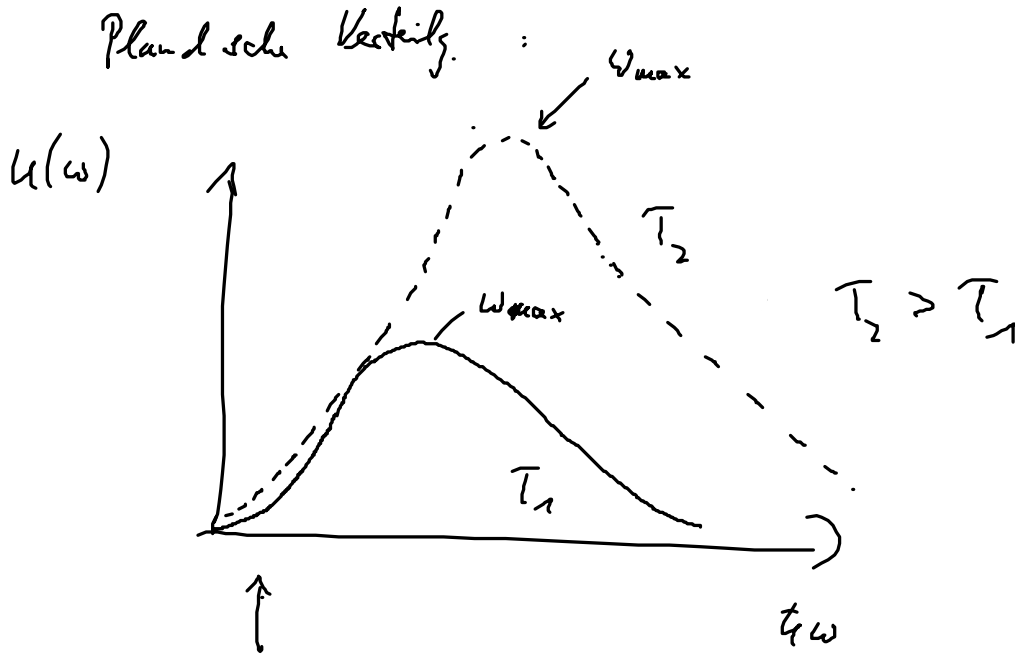
durch Vergleich folgt die spektrale E-Dichte $u(\omega)$

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2} \frac{\omega^3 / c^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

1910

Plancksche Formel für die spektrale E-Dichte
 Spektrum um auf der Temperatur T gehaltenem System.

3.2.5.2. Anwendungen



Singulartil v. f^B
 wird durch ω^3 abgefangen

a) Wiensches Verschiebungsgesetz:

$\omega_{max} = 2,8 kT / \hbar$, kann durch Extremwertaufgabe
 bestimmt werden

bedeutet Farbveränd. des Spektrums

b) Rayleigh-Jeans Gesetz:

klassische Ergebnis: Photon zählt wie bei ideal gas:

$$u_{\text{kl}}(\omega) = \frac{kT}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^2}$$

führt zu ∞ großer Energie „ Ultraviolettkatastrophe “

aus Planck herleitbar für $T \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$)

$$u = \frac{1}{\pi^2} \frac{h \omega^3 / c^3}{e^{\beta h \omega} - 1} = u_{\text{kl}}(\omega)$$

$$1 + \beta h \omega \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \frac{h \omega}{kT} \rightarrow 0$$

c) Bestimmung v. Oberfläche temperierten emittierenden Körpers:

Spektrum messen, aufpassen an Planck-Verteilung und damit T bestimmen oder über ω_{max} .

Sonne: 5600 K

d) Kosmische Hintergrundstrahlung

Wenn Materie und Licht nicht miteinander wechselwirken

so gilt daß sich beide Systeme unabhängig voneinander entwickeln

$$E \sim V T^4 \quad (\text{freie Photonen})$$

↑
kosmisch Ausdehnung
 $V(t)$

↓
Temperatur ist auch
zeitlich konstant da Gesamtenergie
erhalten ist

$$V \uparrow \rightarrow T \downarrow$$

T weiß sicher, und damit kann man die

Planck verteilung als Funktion der Zeit berechnen

Seit dem Zeitpunkt wo Materie + Licht entkoppelt waren.

→ wenn aus auch Theorie V, E bekannt kann
man die heutige Temperatur berechnen:

$$T = 2,73 \text{ K}$$

experimentell beobachtet

e) Treibhauseffekt:

Gesamtenergie konstant des Erdsystems erhöht durch

Treibhausgas

$$E \sim T^4$$

$$E_{\text{alt}} + u\% E_{\text{alt}} \sim \left(T_{\text{alt}} + \Delta T \right)^4$$

↑

prozentuale Erhö. d. E-Haushalts in % der zusätzlich
fakt

⏟

$$T_{\text{alt}}^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{\text{alt}}} \right)$$

nach Taylor

Etwas die Zunahme der Temperatur von 1K / Proz. E_{alt}.
Schlechtes Modell

3.26. Phononen

Dispersionsrelation f. Oszillatoren, um ω_k zu bestimmen

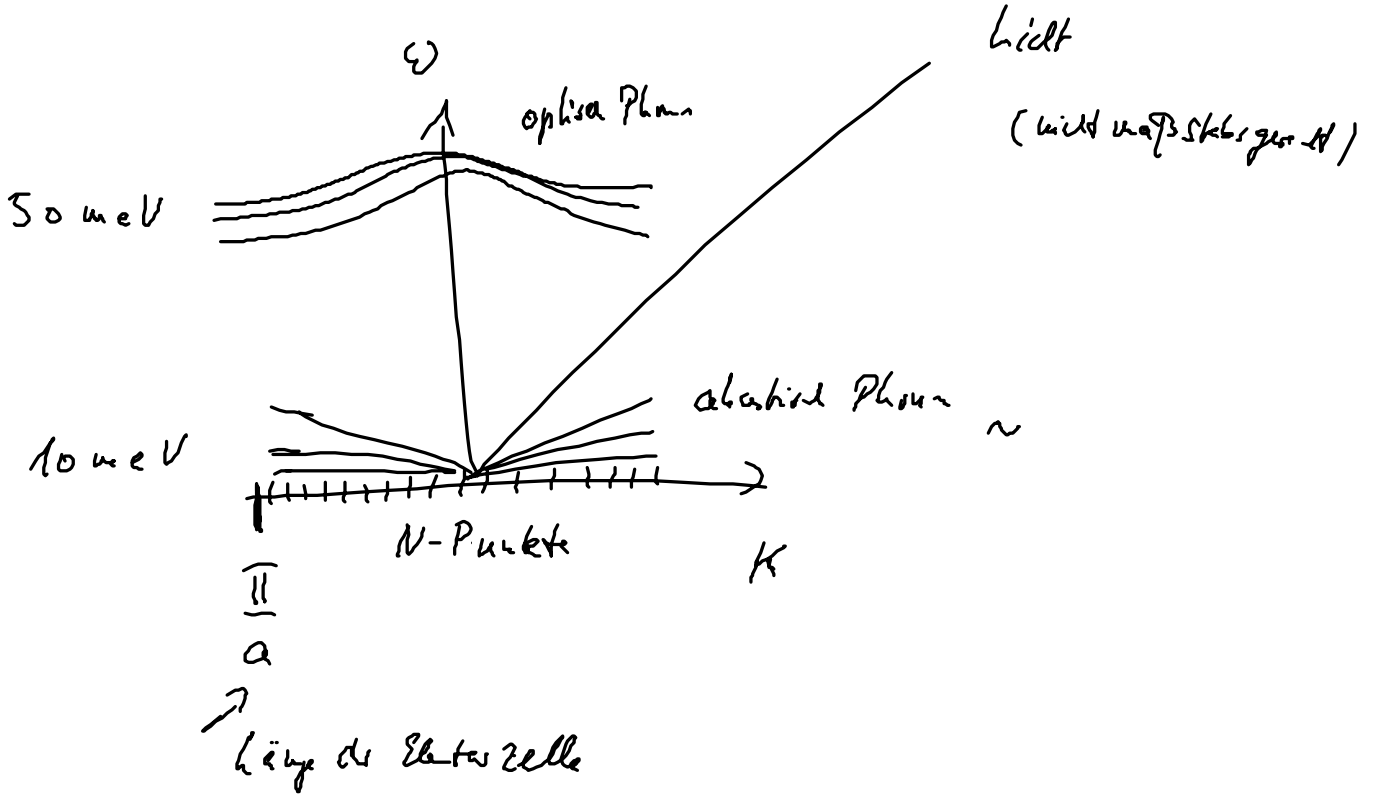
wenn man N Zellen hat mit p -lon pro Zelle so

sagt die theoret. Festkörperphysik:

Es gibt $(3p-3)N$ optische Modi

3 akustische Modi

für 2 atomige Zelle $p=2$



3.2.6.1 Phonon Zustandssumme und Energie

$$E = -\partial_{\beta} \ln Z_k = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\lambda}(\vec{k})}{2} + \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k}) f^B(\hbar \omega_{\lambda}) \right)$$

\uparrow \leftarrow \downarrow
 alle VL $\sum_{\vec{k}}$ Nullpunktenergie
 (wird weglassen)

$$E = \sum_{\lambda=1}^{3p} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k}) f^B(\hbar \omega_{\lambda})$$

\uparrow
 Summ über alle Mode \uparrow alle N-K-Punkte

und spezialisieren werden

3.2.6.2. Debye - Modell der spezifischen Wärme

Später: $c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ (Vorgift)

↑
spezifische Wärme
im System
bei konstantem Volumen

Debye - Modell: - $\rho = 1 \rightarrow$ Zählweise Moden

- $\omega_{\lambda}(\vec{k}) = c_0 |\vec{k}|$

↑
1-3

↑

Schallgeschwindigkeit

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk k^2 4\pi, \text{ mit } \omega = c_0 k$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 c_0^3} \int d\omega \omega^2, \text{ mit } D(\omega) = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 c_0^3}$$

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow = \int d\omega D(\omega)$$

↑ Zustandsdichte

einsetzen in die E -Formel

$$E = \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega D(\omega) \frac{\omega_{\lambda} t}{e^{t\omega\beta} - 1}, \quad \text{identisch Mode 1}$$

$$= \frac{3V}{2\pi^2 c_0^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \frac{t\omega}{e^{t\omega\beta} - 1}$$

Wie bestimmt man diese Frequenz?
 ω_D - Debye Frequenz

$$= \frac{3V t}{c_0^3 2\pi^2} I(\omega_D, \beta)$$

↓
kann nicht mehr analytisch
gelöst werden

1) Dichteverteilung von ω_D :

$$N = \sum_{\vec{k}} 1 = \int_0^{\omega_D} d\omega D(\omega) = \text{bestimmen mit allen Variablen und umstellen nach } \omega_D$$

↑ \vec{k} bestimmt die k -Zählung ↓ ω $\propto \omega^2$

$$\omega_D = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N}{V}} c_0$$

ist damit bestimmt
als Funktion der Teilchendichte im
1Dm Kristall

2). Diskontinua $\bar{I}(\omega_D, \beta)$:

$$\bar{I} = \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}$$

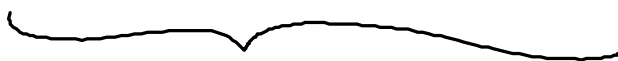
neue Koordinate:

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} = \hbar\omega\beta$$

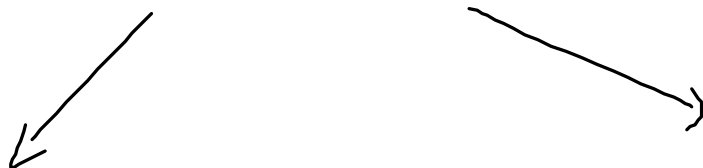
$$= \frac{(kT)^4}{\hbar^4} \int_0^{\hbar\omega_D/kT} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

Debye Temperatur

$$kT_D = \hbar\omega_D$$



hier steht $\bar{E}(T)$ drin.



1. Grenzfall

Klassisch $T \rightarrow \infty$, $\hbar\omega_D/kT \rightarrow 0$

$$\bar{I} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^{\hbar\omega_D/kT} dx \frac{x^3}{1+x-1} \sim T^4 \left(\frac{\hbar\omega_D}{kT}\right)^3 \sim T$$



weil oben Grenze $\rightarrow 0$

weil wir nur kleine Integrationsvariable

Im klassischen Fall ist E proportional zu T

(Quasi klassische Gas)

2. Grenzfall

$T \rightarrow 0$, Quantenlimit, $\frac{T_D}{T} \rightarrow \infty$

$$\bar{I} = \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^{T_D/T} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \rightarrow \left(\right)^4 \int_0^{\infty}$$

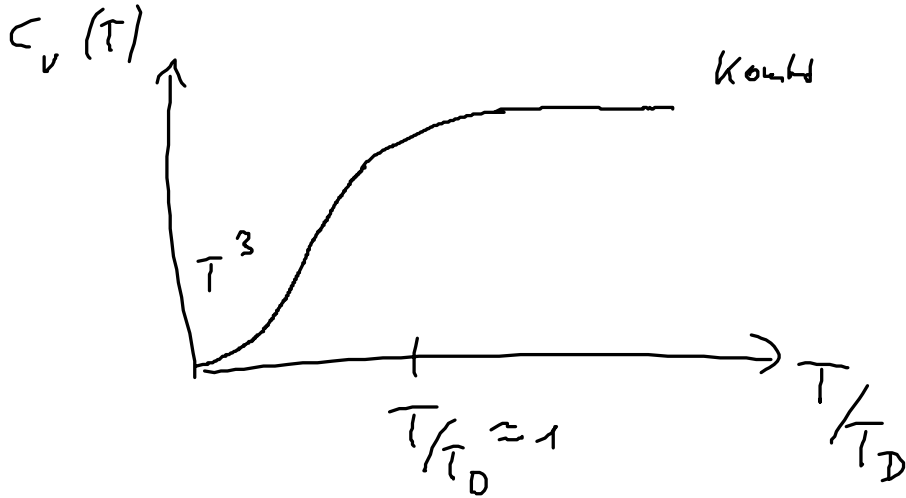
$$\bar{I} \sim T^4$$

Bemerkung

a) Spezifische Wärme $c_v = \partial_T E$ verhält sich

für $T/T_D \rightarrow \infty$: $c_v \rightarrow \text{konstant}$

$T/T_D \rightarrow 0$: $c_v \sim T^3$



Bei der Debye-Temperatur findet der Übergang
 zwischen klass. und Quantenmechanik statt.

b) T_D (Kupfer) $\approx 363 \text{ K}$

T_D (Blei) $\approx 601 \text{ K}$

c) optisch Phononen $\rightarrow \ddot{u}A$

sind relevant i.a. bei hohen Temperaturen

d) bisher: Ionengitter,

es existiert auch Beitrag d. Elektronen

(Fermionen)