

3.4.2. Mittlere Besetzungszahl bei Quantengasen

Suche die Besetzungszahl (mittlere Teilchenzahl n_{k_s} im Einzelteilchenzustand $|n_{k_s}\rangle$):

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}_{k_s} \rangle &= \text{Sp}(\hat{n}_{k_s} \rho) \\ &= \frac{1}{Z_{gk}} \sum_n \langle n | \hat{n}_{k_s} e^{-\beta(H-N)} | n \rangle\end{aligned}$$



wieviele Teilchen sind im Mittel im k -te Zustand

a) Fermionen

$$\langle \hat{n}_{k_s} \rangle = \frac{1}{Z_{gk}} \dots \left(\sum_{n_{k_s}=0}^1 n_{k_s} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu) n_{k_s}} \right) \dots$$

Siehe aus
die Bedng. d.
Zustandsumme

alle andere " u_{k_s} "
analog Bedng. zu
Zustandsumme
(ohne " u_{k_s} ")

$$= \frac{\prod_{k_s=0}^{\infty} \left(\sum_{u_{k_s}=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu) u_{k_s}} \right)}{\prod_{k_s=0}^{\infty} \left(\sum_{u_{k_s}=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu) u_{k_s}} \right)} \leftarrow \text{kürzen}$$

$$= \partial_{\beta\mu} \ln \left(\sum_{u_{k_s}=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu) u_{k_s}} \right)$$

$$= \partial_{\beta\mu} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \right)$$

$$= \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

b) analoge Bedng f. Bosonen: , wo $u_{k_s} = 0, 1, \dots, \infty$

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_{k_s} \rangle &= \partial_{\beta\mu} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} \right) \\ &= + \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \end{aligned}$$

Die mittlere Besetzungszahl für Fermionen / Bosonen heißt

Fermi- bzw. Bose-Verteilung und ist:

$$f_{k}^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

↑
 ϵ_k, ϵ

3.4.3. Diskussion der mittleren Besetzungszahl

a) Interpretation $f^{F/B}$: mittlere Zahl von Teilchen im Energiezustand der Wellenzahl k_i (ϵ_i) bzw. der Energie ϵ

b) klassisch freuz fall: $\mu \rightarrow -\infty$ (geringe Teilchendichte $n_0 = \frac{N}{V}$)

$$f_{k}^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} \xrightarrow{\mu \rightarrow -\infty} \underbrace{e^{-\beta\epsilon_k}}_{\substack{\text{gro\ss} \\ \text{partielle Zahl}}} \underbrace{e^{\beta\mu}}_{\substack{\text{Maxwell-Boltzmann} \\ \text{Verteilg.}}} = f_{k}^{MB}$$

in $f_{k}^{MB} \ll 1$ wegen $e^{\beta\mu} \ll 1$

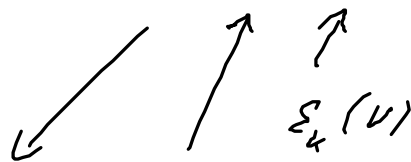
dh. im klassischen Fall: (wenig Teilchen pro Zustand)

ist der Unterschied zw. Fermionen / Bosonen egal!

(weil man nicht an $\int^{F/B} \approx 1$ ran kommt)

c) Bestimmung von $\int^{F/B}$:

$$\int^{F/B} = \int^{F/B} (\mu, \beta, V)$$



problematisch,
man wird lieber
 N festlegen.

festlegen über Temperatur d. Bades



$$N = \sum_k \int_k^{F/B} (\beta, \mu, V) = N(\beta, \mu, V)$$

festlegen

→ umstellt nach $\mu \rightarrow \mu(T, V, N)$

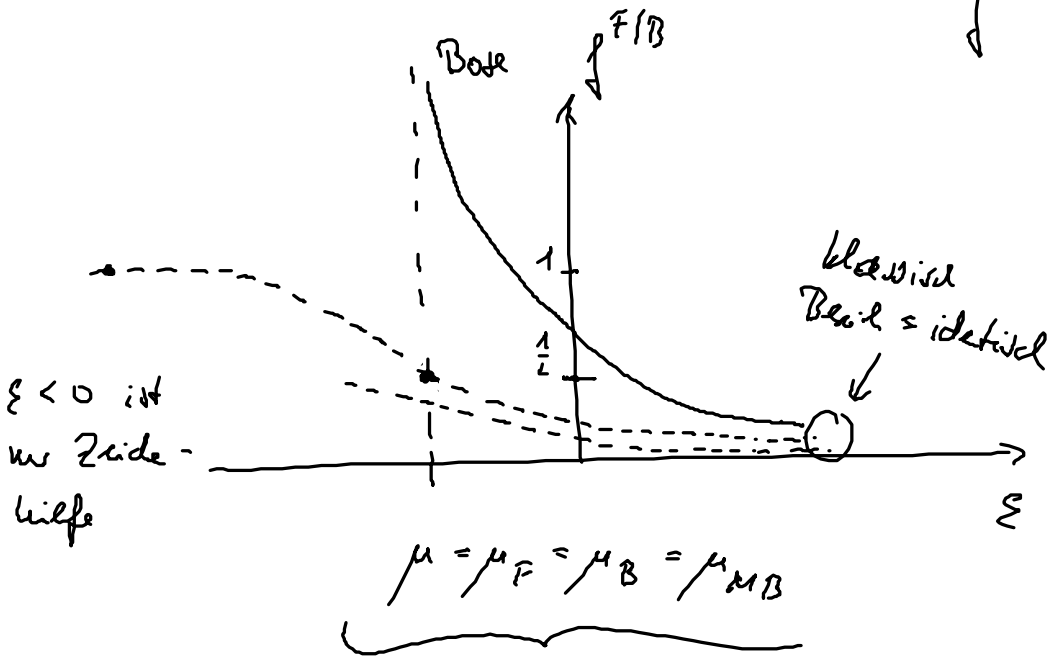
$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\frac{N}{V}}$

d) Zustandsgleichungen:

kanonisch: $E = \sum_{k_s} \epsilon_k \int_k^{F/B} (T, V, \mu)$

fluctuierend: $\beta p = \partial_V \ln Z_g \mu (T, \mu, V)$

e) qualitativ Bild:



$\epsilon < 0$ ist
nur Zweide-
hilfe

Diskussion f. identisch Potential

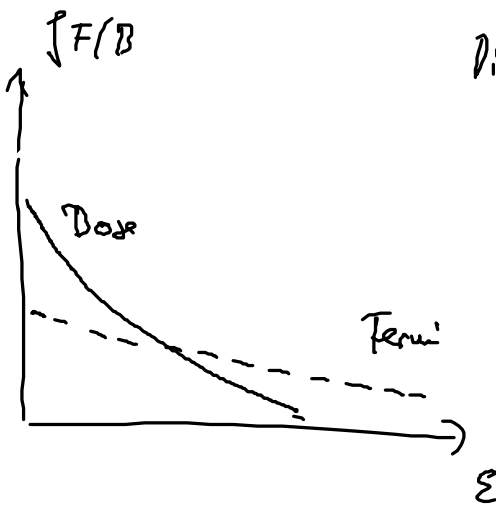
$$\int \frac{F/B}{e^{p(\epsilon-\mu)} \pm 1} = 1$$

Singularität bei
Boson für $\mu > 0$

($\mu = 0$ ist Sonderfall)

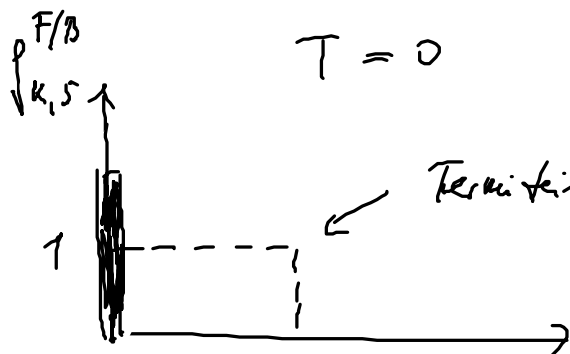
$\rightarrow \mu \leq 0$

(für Fermi beliebig.)



Diskussion f. identisch Teilzahl N
(\sim Fläche unter Kurve)

e) Vorgang auf Quanteneffekt bei $T \rightarrow 0$ extrem, $u_0 \gg \lambda_{th}^3$



$T = 0$

Fermiteilchen bilden Kasten und Höhe 1

↑
 Bosonische versammelung
 sind im Grundzustand

ε genau Diskussion später

3.5. Quanten effekte in bosonische und fermionische gas

3.5.1 Zustandsgleichung

Volumen

$$\beta p = \partial_V \ln Z_{gk}^{F/B} = \partial_V \left\{ \pm \sum_{k_i, s} \ln \left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_{k_i}(V) - \mu)} \right) \right\}$$

↑
 über VL
 ↑
 diskrete

$$s = \frac{1}{2} (F), s = 0 (B)$$

$$= \pm (2) \sum_{k_i} \frac{\pm e^{-\beta(\epsilon_{k_i} - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_{k_i} - \mu)}} \left(\frac{\partial \epsilon_{k_i}}{\partial V} \right) \beta = - (2) \dots$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial V} \Rightarrow \epsilon = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} \propto \frac{1}{L^2} = \frac{1}{V^{2/3}} \quad (V = L^3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial V} \propto \frac{1}{V^{2/3}} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3V} \frac{1}{V^{2/3}} \sim$$

$$\beta p = \underbrace{(2)}_{=k_i} \sum_{k_i} f_{k_i}^{F/B} (-\beta) \left(-\frac{2}{3V}\right) \epsilon_{k_i} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{Mittelwert} \\ \downarrow \\ E = \sum_{k_i} \epsilon_{k_i} f_{k_i}^{F/B} \end{array}$$

Herzisch und kalorisch
Zustandsgleichung hängen
zusammen

$$p = \underbrace{(2)}_{=3} \frac{\bar{E}}{V}$$

Es reicht aus, die kalorische Zustandsgl. $E = E(T, V, \mu)$ zu bestimmen.

$$\bar{E} = \underbrace{(2)}_{=k} \sum_{k} \epsilon_k f_k^{F/B} (\mu, T, V).$$

Man kann sich erst was vorstellen und genau diskutieren,
wenn man chemisches Potential $\mu = \mu(N, V, T)$ bestimmt hat.

3.5.2. Ideales Bosgas

$\mu \leq 0$ ist zugelassen, $S = 0$

μ durch N, V ersetzen in der Verteilung.

$$N = N(V, T, \mu) = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad , \quad \underline{\text{Versuch}} \text{ nach } \mu \text{ um zu stellen.}$$

$$N = \sum_k \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}} = \sum_k e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)l}$$

$$= \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} (\quad)^{l+1} = \sum_k \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)l}$$

Index verschieb.

$$= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta\mu l} \underbrace{\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k}_{\sum_k, \epsilon_k \text{ eingesetzt}} e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} l}$$

1dimensionale Gauß-Integrale
 $\int_{\mathbb{R}} dx x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2$

$$= \frac{V}{\lambda_{th}^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu l}}{l^{3/2}}$$

Notiz: $e^{\beta\mu}$ nennt man Virialo. Fugazität

N als Reihenentwicklung des Virial

für $\mu < 0$ könnte einige Terme der Reihe ausfallen.

"Virialentwicklung"

Riemannsche Zeta -

$l = 1$ gibt klassische Gas funktion

da die Reihe wichtig ist: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{e^{\nu}} \equiv g_{\nu}(z)$

$$\frac{N}{V} = n_0 = \frac{1}{\lambda_{th}^3} g_{3/2}(e^{\beta\mu})$$

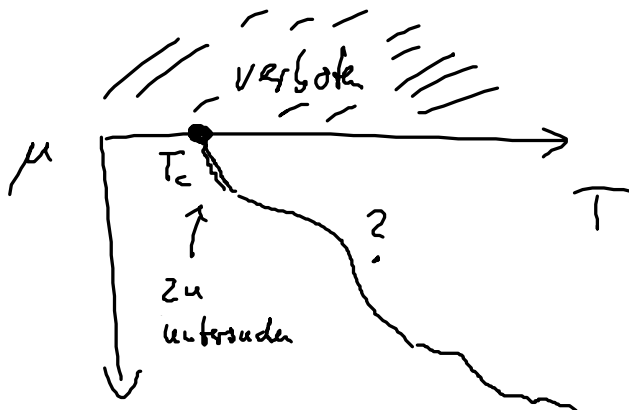
wenn man das umstellen kann nach Dichte,

gewinnt man das $\mu = \mu(n_0, T)$:

(i) klassischer Grenzfall $T \rightarrow \infty, n_0 \rightarrow 0$ wissen: $\mu \rightarrow -\infty$

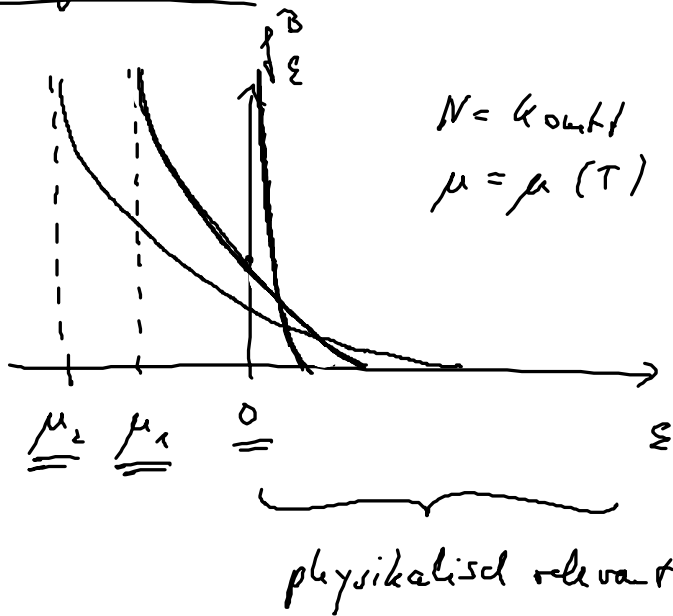
(ii) $\mu \leq 0$ (Singulartät)

(iii) $\mu \rightarrow 0$ kann sein, was bei $\mu = 0$ genau passiert, $n_0 \beta$ untersucht werden.



Zugehörige Bild

bekannt $\mu \rightarrow -\infty$
 $T \rightarrow \infty$



qualitativ!

wil $\mu = \mu(V = \text{konst}, N = \text{konst}, T)$

wenn $\mu \rightarrow 0$, so geht $T \rightarrow T_c$ die kritische Temperatur,
 bei der $\mu = 0$ wird.

Formel für das chemische Potential für $T = T_c$:

$$\lambda_{\text{fe}}^3(T_c) u_0 = g_{3/2}(1) = 2,61$$

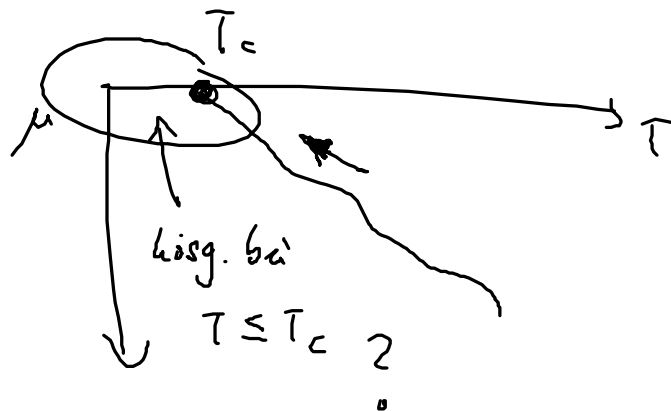
\uparrow
 $e^{\beta\mu} = e^{\beta \cdot 0} = 1$

$$\lambda_{\text{fe}}^3 = \frac{2\pi^2 m^2}{m k T} \Big|_{T=T_c} \quad \left. \vphantom{\lambda_{\text{fe}}^3} \right\} \text{umstellend nach } T_c$$

$$\rightarrow T_c = \frac{2\pi^2 m^2}{m k g_{3/2}(1)} u_0$$

Die offensichtlich steigt die kritische Temperatur bei $d \rightarrow 0$
 wird mit der Dicke u_0 . $T_c \uparrow$, $u_0 \uparrow$

Interessante nichtklassische Effekte $\mu \rightarrow 0$ treten bei hohen Dicken auf.



Was macht das chemische Potential an
 dieser kritischen Stelle?

Wir brauchen μ für $E, p, (\int^{\mu} (\mu, T, V))$

Vorschlag: u_0 konstant

T wird verringert im Experiment

$T \rightarrow T_c \Leftrightarrow \mu \rightarrow 0$

aber was passiert bei $T < T_c$?