

## 3.5.4. Ideales Fermigas

Modellsystem für verschiedenste Fermionen:

Elektronen in Festkörpern, Atomen

Nukleonen in Atomkernen

Quarks in Nukleonen

flüssiges Helium ( $^3\text{He}$ )

analoges Vorgehen wie Bosogas:

$$f_{\vec{k}}^F = \frac{1}{e^{(\epsilon_{\vec{k}} - \mu) \beta} + 1} \quad \text{Verteilung,}$$

zunächst  $\mu(T, \mu_0)$  bestimmen

Teilchenzahlgleichg., um  $\mu(T, \mu_0)$  zu bestimmen

$$N = \sum_{\vec{k}, s} f_{\vec{k}s}^F = \left| \sum_s (2s_0 + 1) = 2 \right| =$$

$s_0 = \frac{1}{2} \text{ Spin}$

Summe über Teilchenzahl

in allen Zuständen

$$N = 2 \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}s}^F = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{k}} - \mu) + 1}}$$

große Kiste

→ umstellen um  $\mu (T, u_0 = \frac{N}{V})$

$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  fñh wir als neue Variablen im Integral  
laufen, Kugelkoordinaten

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int dk k^2 \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

$$k \rightarrow \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

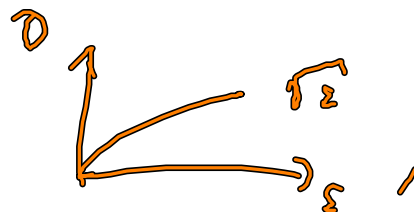
$$d\epsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\epsilon} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{m}} \sqrt{\epsilon} dk$$

k über  $\epsilon$  ausdrücken

$$u_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f_k^F = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\epsilon \underbrace{\frac{\sqrt{m}}{\hbar \sqrt{2}} (\sqrt{\epsilon})^{-1} \frac{2m}{\hbar^2} \sqrt{\epsilon}}_{D(\epsilon)} f_\epsilon^F$$

$$u_0 = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) f_\epsilon^F, \quad D(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon}$$

$D(\epsilon)$  Kugel Zustandsdichte  $\sim \sqrt{\epsilon}$



Wahrscheinlichkeit in System pro Energieintervall zählt:

$$\text{Anzahl d. Zustände} = \sum_{\text{Stk}} \cdot \int d\varepsilon \mathcal{D}(\varepsilon)$$

↑  
Zustandsdichte

Mit Nanokalkülus kann man unendlich dimensionale Elektronensysteme erzeugen mit unterschiedl. Zustandsdichte

(0d, 1d, 2d, 3d)

←  
Starke Eigenfeldänderungen

die Gleichung  $n_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon \mathcal{D}(\varepsilon) f_{\varepsilon}^F(\mu, T)$  ist

ein implizite Gleichung f.  $\mu(T, n_0)$ .

ein nichtige Umstellung ist nicht möglich (numerisch)

Grenzfälle:  $T \rightarrow \infty, n_0 \rightarrow k_B \rightarrow \mu = \text{nicht fest}$

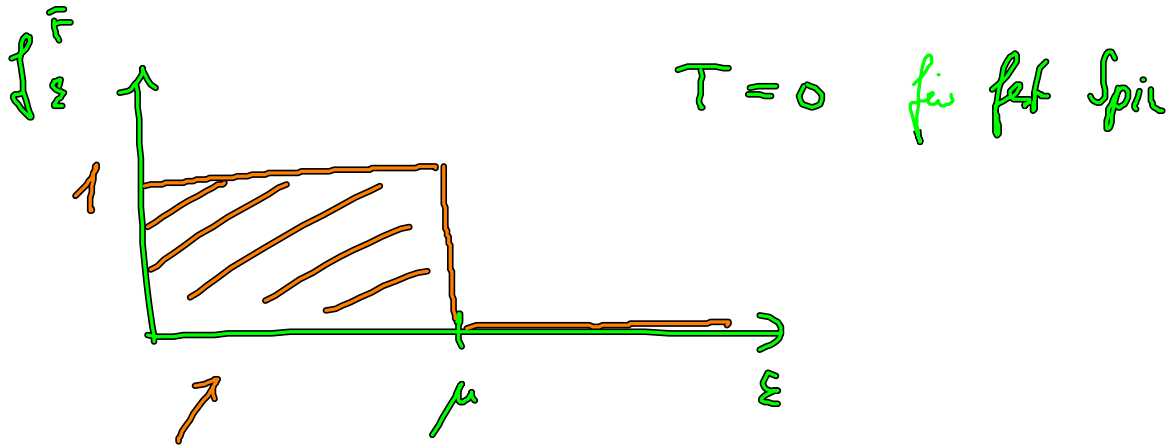
$T \rightarrow 0, n_0 \rightarrow \text{groß} \rightarrow$  Quanteneffekt von Fermionen

$T \rightarrow 0$  ist das auch interessante Fall

$$\frac{1}{T=0}$$

$$\int_{\epsilon}^{\beta} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \begin{cases} 0 & \text{für } \epsilon > \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon-\mu)} \rightarrow \infty \\ 1 & \text{für } \epsilon < \mu, \text{ denn } e^{\beta(\epsilon-\mu)} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$



in jedem Zustand im Mittel 1 Elektron

hört auf, wenn alle El. besetzt sind,

also muss sich  $\mu$  durch  $u_0$  bestimmen lassen

$$u_0 = \int_0^{\mu(T=0, u_0)} d\epsilon D(\epsilon) = \int_0^{\mu} d\epsilon \sqrt{\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \frac{u_0^{3/2} \sqrt{2}}{4^3} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_0^{3/2} \sqrt{2}}{4^3} \frac{2}{3} \frac{3}{2} \mu^{3/2}$$

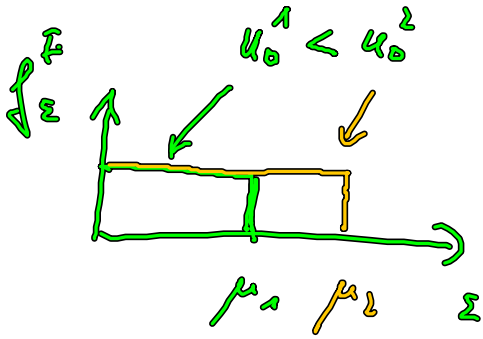
Fermi für  $T=0$

eingesetzt

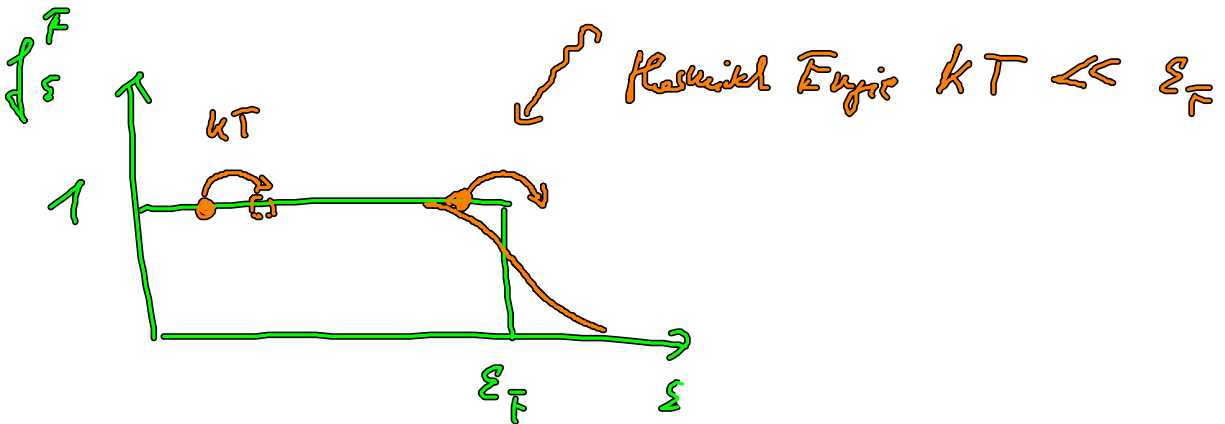
nach  $\mu$  umstellen:

$$\underline{\mu(T=0, u_0)} = \left( 3\pi^2 \right)^{2/3} \frac{4^3}{2u_0} u_0^{2/3} \equiv \underline{\epsilon_{Fermi}}$$

$\mu (T=0)$  nennt man Fermienergie.  $\boxed{\varepsilon_F \sim u_0^{2/3}}$



ausdehnt Bild für  $T \neq 0$ , aber noch klein



es ergibt sich eine Ausdehnung der Fermi-Verteilung um  $kT$   
 $\rightarrow$  muß auch geachtet werden.

typische Systeme:  $kT$  bei Zimmertemp.  $\approx \frac{1}{40} eV$

$\varepsilon_F$  von Metallelektron  $1-10 eV \rightarrow$  nichtklassisch

Fermi gas mit  $\varepsilon_F \gg kT$  heißen entartete Fermigase

$\epsilon_F$  von großen Ziegeln, Karbonsteinen  $10^3 - 10^5$  eV

Man kann starkes und nichtverfälschte Sterne,

hängt von  $kT$  und  $\epsilon_F \sim u_0^{2/3}$  ab.

Manche fikt genau  $\mu$  ( $T \neq 0, u_0$ ) zu berechnen:

$$u_0 = \int_0^{\infty} ds D(s) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad \text{wird mit Hilfe der}$$

Sommerfeld-Entwicklung vereinfacht,

und kleinen Parameter entwickeln für starkes Gas:

$$\frac{kT}{\epsilon_F} \ll 1. \quad \mu \approx \epsilon_F, \quad \text{such } \mu(T, u_0):$$

$$u_0 = \left( \int_0^{\mu} d\epsilon + \int_{\mu}^{\infty} d\epsilon \right) D(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$
$$= \int_{\mu}^{\infty} ds D(s) \frac{1}{e^{\beta(s - \mu)} + 1} + \int_0^{\mu} d\epsilon D(\epsilon) - \int_0^{\mu} ds D(s) \frac{1}{e^{-\beta(s - \mu)} + 1}$$

Parameter wird durch neue Variable eingeführt:

$$x = \pm \beta (\varepsilon - \mu)$$

$$u_0 = \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu+x/\beta)}{e^x+1} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D(\mu-x/\beta)}{e^x+1}$$

mit (+) mit (-)

Führt Taylorreihe f. die beiden letzten Terme  $\frac{x}{\beta} \ll \mu$

$$\frac{\mu}{kT} \gg x, \text{ lt. Definition } \frac{\mu}{kT} \gg 1$$

$x$ -Werte  $> 1$  werden durch  $e^x$  abgedeckt

die unabh. Term d. Reihe fallen gegenwärtig weg und man erhält:

$$u_0 \approx \int_0^{\infty} d\varepsilon D(\varepsilon) + \int_0^{\infty} \frac{dx}{\beta} \frac{D'(\mu)}{e^x+1} \frac{2x}{\beta}$$

$D'$  ist die erste Ableitung an dem 1. Term Taylor

$$\begin{aligned}
 \mu_0 &\approx \underbrace{\int_0^{\mu} d\varepsilon D(\varepsilon)} + \frac{2}{\beta^2} \underbrace{D'(\mu)} \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{x+1}}} \\
 &\sim \int d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \quad \sim \frac{\partial}{\partial \mu} \sqrt{\mu} \quad \text{Zahl}
 \end{aligned}$$

umstellen nach  $\mu = \mu(\beta, \mu_0) \rightarrow$

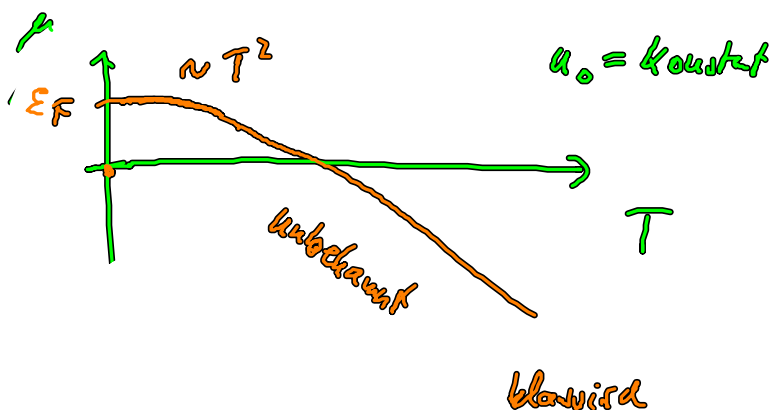
$$\mu = \underbrace{\varepsilon_F}_{\mu(T=0)} \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 \right)$$

$\mu_0$  hochtrichter in  $\frac{\varepsilon_F}{k}$

$$\varepsilon_F \sim \mu_0^{2/3}$$

### Bemerkung:

a) Das chemische Potential  $\mu$  kann (im Gegensatz zu Bosonen) negativ und positiv werden!

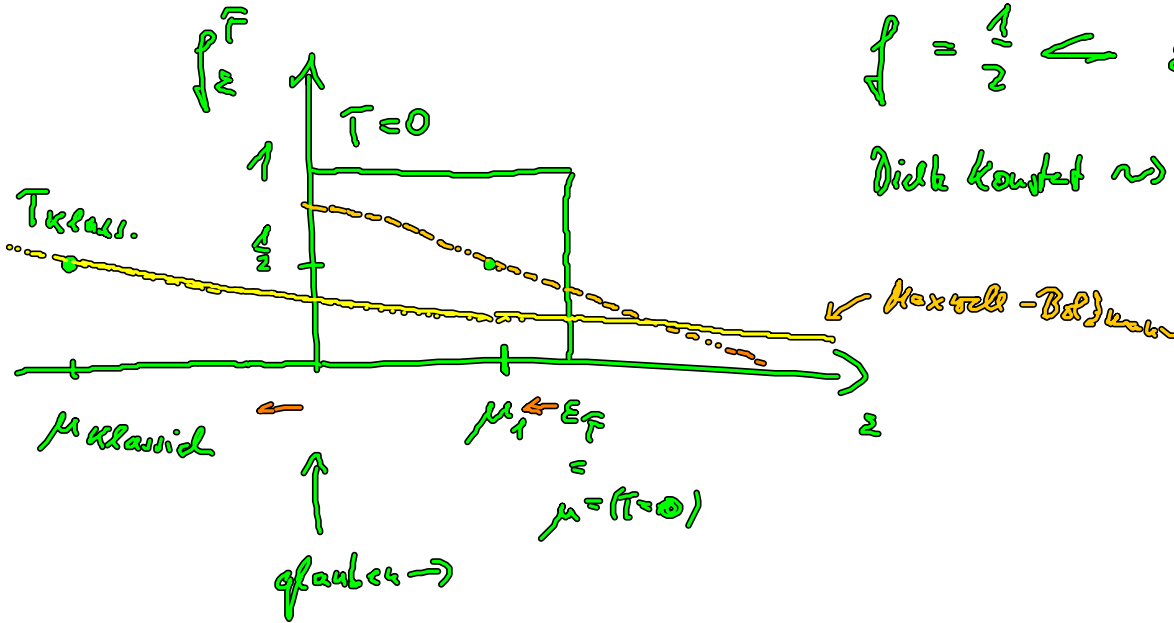




$$T \rightarrow 0$$

$$\mu \rightarrow -\infty$$

b) Verlauf der Fermifunktion



$$f = \frac{1}{2} \leftarrow E = \mu$$

Dicke konstant  $\leadsto$  Fläche ändert, bis  $D(s)$

Maxwell-Boltzmann

c) spezifisch Wärme d. Elektronengas:

mit Sommerfeld mit  $u_0 = \frac{N}{V}$  Breche los, sondern

$$\text{and } E = \frac{\pi^2}{6} D(E_F) T^2 \sim T^2 \quad (\text{kleine Temperatur})$$

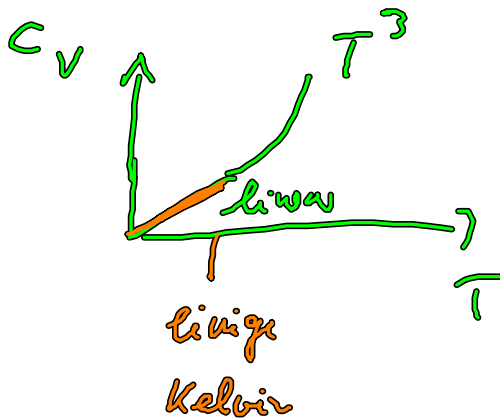
$$\rightarrow c_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \sim T$$

insgesamt gibt es also 2 Anteile zu  $c_v$

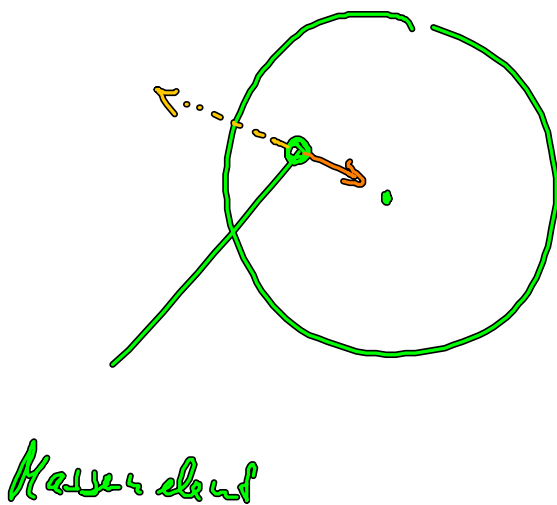
beim Festkörper für  $T \rightarrow 0$ :

$$C_v \sim T \quad (\text{Elektronen})$$

$$C_v \sim T^3$$



d) keine Theorie für Stabilität v. Sterne



Kugel mit Gas  
Plasma aus + und -  
↘ ↙

Kern elektromagn. Kraft

→ Gravitation arbeitet daran die  
Stern zu kollabieren

---> Druckkraft d. Gases, arbeitet  
an Explosion

entartet bzw. nicht entartete Sterne,



$kT > ? < \mu$

Ferngröße

$T \rightarrow 0$

(Dichte hoch)

Source

Wissen ideal für f. Dred nicht aus

(Dichte ist gering)

$\frac{N}{V} = \text{konst}$   
↑

$$E_{\text{gravit.}} = -\frac{G}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_0(\vec{r}') \rho_0(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= -\frac{G}{2} \frac{N^2}{V^2} \int d^3r \int d^3R' \frac{1}{|\vec{R}'|} ; |\vec{R}'| = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$= -\frac{G}{2} \frac{N^2}{V^2} V \int_0^R \int_0^{R'} \frac{1}{R'} dR' dR \quad R\text{-Skala}$$

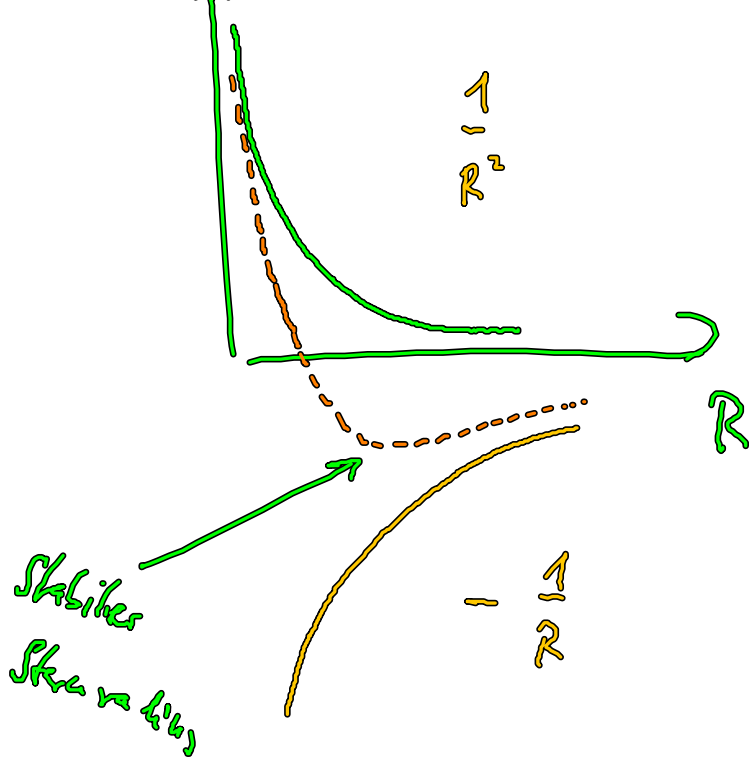
$$V \sim R^3 \quad \int_0^R \int_0^{R'} \frac{1}{R'} dR' dR \sim \frac{1}{R}$$

$$E_{\text{Fern}} = \int ds \rho(s) \epsilon \sim \rho_0^{2/3} \sim \frac{1}{R^2}$$

$T=0$

Energie d. Ferngröße

$$E = \bar{E}_{\text{grav}} + \bar{E}_{\text{kin}}$$



Verh. von f. Höhe Dichte

$$kT \ll \epsilon_F$$

aus dem folgt result v. Fermidruck und Gravitationsdruck.

### e) Klassisch Zustandsgleichung

$$p = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \underset{T \rightarrow 0}{=} \frac{3}{5} \epsilon_F \quad (\text{Kittelung})$$

Druck und nicht nicht

f.  $T \rightarrow 0$

im Gegensatz zu Bohr

$$p \sim n_0^{2/3}$$

Ein Fermigas kann nie auf ein Punkt komprimiert werden.