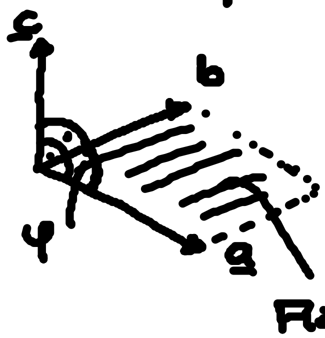
2.1.2 Vektorprodukt

• **Geg:** $\underline{a}, \underline{b}$



$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{c} := \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b} \\ |\underline{c}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\varphi \\ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ bilden Rechtssystem} \\ \qquad \text{„ schraube} \end{array}} \quad (2.8)$$

• **Bsp:** „Momente": $\underline{r} \times \underline{a}$

(1) Drehimpuls: $\underline{a} = \underline{p} \longrightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

⋮

$\longrightarrow$ Mechanik

• $\underline{c}$ … axialer oder Pseudovektor

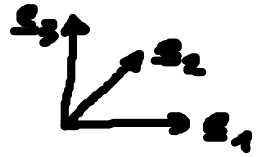
Raumspiegelung: $\left.\begin{array}{l} \underline{a} \to -\underline{a} \\ \underline{b} \to -\underline{b} \end{array}\right\}$ aber: $\boxed{\underline{c} \to \underline{c}!}$

• Rechenregeln:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \longrightarrow \underline{a} \times \underline{a} = 0 \\ (2) & \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c} \end{array}\right\} \quad (2.9)$$

(3) $p\,\underline{a}\times\underline{b} = \underline{a}\times p\,\underline{b} = p\,(\underline{a}\times\underline{b}) \quad , p\in\mathbb{R}$

• orthonormierte Basis, Rechtssystem:



$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}_i\times\underline{e}_i = 0 \quad , \quad i=1,2,3 \\ \underline{e}_1\times\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \\ \left.\begin{array}{l}\underline{e}_2\times\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \\ \underline{e}_3\times\underline{e}_1 = \underline{e}_2\end{array}\right\}\text{zyklische Vertauschung}\end{array}\right\} \quad \boxed{\underline{e}_i\times\underline{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\underline{e}_k} \quad (2.10)$$

mit

(2.11)

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123} \\ 1 & \text{für alle geraden Permutationen von 123} \\ -1 & \text{" " ungeraden " "} \\ 0 & \text{sonst, d.h. mindestens 2 Indizes gleich} \end{cases}}$$

... vollständig antisymmetrischer oder Levi-Civita-Tensor

Permutation: Vertausche 2 Indizes

Bsp: $\varepsilon_{123} = 1 \xrightarrow{1\times} \varepsilon_{213} = -1 \xrightarrow{1\times} \varepsilon_{312} = 1$

$\varepsilon_{123} \xrightarrow{2\times} \varepsilon_{312}$

• $\underline{a}\times\underline{b}$ in Komponenten:

$$\underline{a}\times\underline{b} \underset{(2.5)}{=} (a_i\,\underline{e}_i)\times(b_j\,\underline{e}_j) = a_i\,b_j\,\underbrace{(\underline{e}_i\times\underline{e}_j)}_{\varepsilon_{ijk}\underline{e}_k = \varepsilon_{kij}\,\underline{e}_k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\underline{a}\times\underline{b} = \varepsilon_{kij}\,a_i\,b_j\,\underline{e}_k \\ [\underline{a}\times\underline{b}]_k = \varepsilon_{kij}\,a_i\,b_j\end{array}} \quad (2.12)$$

also: $[\underline{a}\times\underline{b}]_1 = a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \;,\quad [\underline{a}\times\underline{b}]_2 = a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \;, \ldots$

• Merkregel:

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \_ + \_ + \_ - \_ - \_ - \_ \quad (2.13)$$

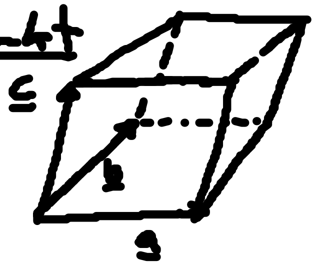
- nützliche Rechenregeln:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl} \qquad (2.14)$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\cdot\underline{b}) \qquad (2.15)$$

Beweis: Übungen

2.1.3. Spatprodukt



- Def.: $\boxed{\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})}$ (2.16)

$|\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})| \hat{=}$ Volumen des Spates $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ [Grundfläche × Höhe]

$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) > 0$, falls $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ Rechtssystem

< 0, falls " Linkssystem

$\longrightarrow$ zyklische Eigenschaften:

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\times\underline{a}) = -\underline{c}\cdot(\underline{b}\times\underline{a}) \text{ etc.} \qquad (2.17)$$

- Pseudoskalar: Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelung

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \underline{a} \to -\underline{a} \\ \underline{b} \to -\underline{b} \end{array}\right\} \underline{a}\times\underline{b} \to \underline{a}\times\underline{b} \\ \underline{c} \to -\underline{c} \end{array}\right\} \underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) \to -\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})$$

- Orthonormalbasis:

$$\boxed{\underline{e}_i \cdot \underbrace{(\underline{e}_j \times \underline{e}_k)}_{(2.10)\ \varepsilon_{jkm}\underline{e}_m} = \varepsilon_{ijk}} \qquad (2.18)$$

$$\underbrace{\phantom{(2.10)\ \varepsilon_{jkm}\underline{e}_m}}_{\varepsilon_{jki}}$$

mit $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_m = \delta_{im}$

- in Komponenten:

$$\underline{c}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = c_i\,a_j\,b_k\,\underbrace{\underline{e}_i\cdot(\underline{e}_j\times\underline{e}_k)}_{\varepsilon_{ijk}} = \varepsilon_{ijk}\,c_i\,a_j\,b_k$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

2.2 Einschub: Matrizen (Details: s. HM)

- Elemente aus $\mathbb{R}^{n\times m}$:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & \cdots & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Komponenten von $\underline{\underline{A}}$: $A_{ij} = [\underline{\underline{A}}]_{ij} \in \mathbb{R}$

i: Zeile, j: Spalte

- Bsp: $n,m=2$ $\quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

- Anwendung: (i) Drehmatrizen ($\longrightarrow$ Kap. 2.3)
  (ii) Darstellung von Tensoren 2. Stufe ($\longrightarrow$ Kap. 4)
  (iii) lineare Gleichungssysteme ($\longrightarrow$ Kap. 3)

- Rechenregeln:

$$\left.\begin{aligned} &(i)\ [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}]_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \\ &(ii)\ [p\underline{\underline{A}}]_{ij} = p A_{ij}, \quad p \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad (2.21)$$

$\longrightarrow$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzgl. Addition ($\longrightarrow$ Kap. 2.4)

NB. Verallgemeinerung auf $\mathbb{C}^{n\times m}$ möglich.

- **Def:** transponierte Matrix $\underline{\underline{A}}^t$ von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

in Komponenten: $[\underline{\underline{A}}^t]_{ij} = A_{ji}$

in Matrixform:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & \cdots & A_{1n} \\ A_{k1} & & & & \\ \vdots & & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1k} & & & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- Spiegelung an Diagonale
- k. Zeile $\longrightarrow$ k. Spalte

Bsp 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bsp 2: Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^{n \times m}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Def.:** $\boxed{\text{Spur von } \underline{\underline{A}} = \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}} = \sum_i A_{ii} = A_{ii} \quad , \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$ (2.23)

2.2.1 Matrixmultiplikation

- Spezialfälle:

(i) $n = m$: $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) symbolisch: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(2) in Komponenten: $A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$

(3) in Matrixform:

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{A}} \\ i \begin{pmatrix} \text{———} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \underline{\underline{B}} \\ \begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix} \\ k \end{array} = \begin{array}{c} \underline{\underline{C}} \\ i \begin{pmatrix} - - - & C_{ik} & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ k \end{array}$$ (2.24)

Bilde Skalarprodukt aus i-tem Zeilenvektor von $\underline{\underline{A}}$ mit k-tem Spaltenvektor von $\underline{\underline{B}}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{b} = \underline{c}$$

$$A_{ij} b_j = c_i$$

$$i \begin{pmatrix} \text{———} \\ \\ \end{pmatrix}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}_{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}_{\underline{c}}$$ (2.25)

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Anwendung: lineares Gleichungssystem: $\underline{b} = \underline{x}$ ... Variable

- allgemein: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{m \times r}$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \quad \in \mathbb{R}^{n \times r} \\ &A_{ij} B_{jk} = C_{ik} \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

- im $\mathbb{R}^{n \times n}$:

(i) Einheitsmatrix: $[\underline{\underline{1}}]_{ij} = \delta_{ij}$

(ii) inverse Matrix: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$

(iii) invertierbare $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilden Gruppe bzgl. Multiplikation

$$\boxed{\begin{array}{ll} (A1) & \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und invertierbar} \ \ldots \text{ abgeschlossen} \\ (A2) & \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{C}} \quad \ldots \text{ assoziativ} \\ & A_{ij}(B_{jk} C_{kl}) = (A_{ij} B_{jk}) C_{kl} \\ (A3) & \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}} \quad \ldots \text{ neutrales Element} \\ & A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik} \\ (A4) & \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}} \quad \ldots \text{ inverses Element} \\ & A_{ij} A^{-1}_{jk} = \delta_{ik} \end{array}} \quad (2.28)$$

Bem: zu (A1): $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$ (2.29)

- Achtung: i.a. $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ ... nicht kommutativ
- weitere Regeln: (s. Übungen)

(i) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^t = \underline{\underline{B}}^t \underline{\underline{A}}^t$ (2.30)

(ii) $Sp(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = Sp(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$ (2.31)

2.3 <u>Drehungen/Spiegelungen</u>

- Problemstellung:
  (1) Beschreibe Drehung / Spiegelung von $\underline{x} \in V$
  (2) Darstellung von $\underline{x}$ bzgl. neuer Basis
- Anwendung:
  (1) Basiswechsel
  (2) starrer Körper (klass. Mechanik)
  (3) Computergraphik (Drehungen von Objekten)
  (4) Symmetriebetrachtungen
  (5) Eugene Paul Wigner
  Prof. an TU → 1933
  Nobelpreis 1963 ....