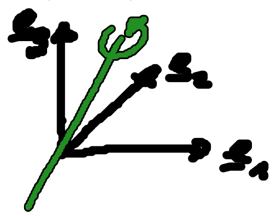
2.3 Drehungen/Spiegelungen

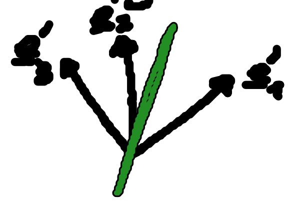
- Problemstellung:
  (1) Beschreibe Drehung/Spiegelung von $\underline{a} \in V$
  (2) Darstellung von $\underline{a}$ bzgl. neuer Basis

- Anwendung:
  (1) Basiswechsel
  (2) starrer Körper
  (3) Computergraphik
  (4) Symmetriebetrachtungen
  (5) Eugene Paul Wigner

- Orthonormalbasis (ONB):

$$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{\text{Drehung um bel. Achse}} \{\underline{e}_1' = \underbrace{R\underline{e}_1}_{\text{gedrehte } \underline{e}_1}, \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$$





$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j \quad \text{mit } D_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j = \cos \sphericalangle(\underline{e}_i', \underline{e}_j)} \qquad (2.32)$$

- Eigenschaften der „Drehmatrizen" $\underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:
  Winkel- und Normerhaltend („Isometrie")

insbes.: $\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j' = \delta_{ij} \overset{(2.32)}{=} (D_{ik}\underline{e}_k) \cdot (D_{jl}\underline{e}_l) = D_{ik}D_{jl}\underbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l}_{\delta_{kl}}$

$$\xrightarrow{D_{jk} = D^t_{kj}} \quad \xrightarrow{(2.27)} \quad \boxed{\begin{aligned} D_{ik}D_{jk} &= \delta_{ij} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \mathbb{1} \\ \underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{D}}^{-1} \end{aligned}} \qquad (2.33)$$

... orthogonale Matrix $\in O(3)$

(nichtkommutative Gruppe aller Drehungen & Spiegelungen)

Bem: $\underline{D}^{-1}$ ... macht Drehung $\underline{D}$ rückgängig = zu $\underline{D}$ inverses Element

• „Konstruktion":

$$(2.32) \longrightarrow \underline{D} = \begin{pmatrix} [\underline{e}_1'] = [\underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1,\ \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2,\ \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3] \\ [\underline{e}_2'] = \ldots \\ [\underline{e}_3'] = \ldots \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

• Problemlösung:

(1) Drehung/Spiegelung von $\underline{a}$:

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \longrightarrow R\underline{a} \overset{!}{=} a_i \underline{e}_i' \underset{(2.32)}{=} a_i D_{ij} \underline{e}_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} [R\underline{a}]_j &= a_i D_{ij} \\ &= D^t_{ji} a_i \end{aligned}} \quad (2.35) \quad \text{... in der ungedrehten Basis}$$

im $\mathbb{R}^n$: $\boxed{R\underline{a} = \underline{D}^t \underline{a}}$

„aktiver Standpkt."

(2) $\underline{a}$ in neuer Basis: $\underline{a} = a_j \underline{e}_j \overset{!}{=} a_i' \underline{e}_i'$

$\longrightarrow$ Trafo. von Vektorkomp.

$$a_i' = \underline{e}_i' \cdot \underline{a} = \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j}_{D_{ij}} a_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} a_i' &= D_{ij} a_j \\ a_i &= D^t_{ij} a_j' \end{aligned}} \quad (2.36) \longrightarrow D^t_{ki} a_i' = \underbrace{D^t_{ki} D_{ij}}_{\delta_{kj}} a_j = a_k$$

$$\xrightarrow[i \to j]{k \to i}$$

„passiver" Standpkt.

mit $\underline{a}, \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$: $\boxed{\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{D}\,\underline{a} \\ \underline{a} &= \underline{D}^t \underline{a}' \end{aligned}}$ (2.37)

• Bsp1: Spiegelung an Ebene $\perp \underline{e}_1$

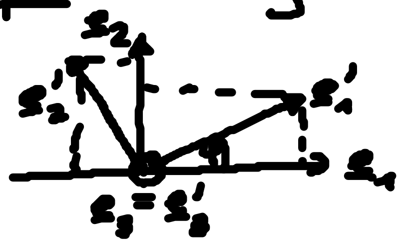
$\longrightarrow \underline{e}_1' = -\underline{e}_1,\ \underline{e}_2' = \underline{e}_2,\ \underline{e}_3' = \underline{e}_3$

$$\longrightarrow \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.38)$$

Bsp 2: „Raumspiegelung" = Pkt. spiegelung am „Ursprung"

$$\longrightarrow \quad \underline{e}_i' = -\underline{e}_i \quad \longrightarrow \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

<u>Bsp 3:</u> Drehung um $\underline{e}_3$ (z-Achse):



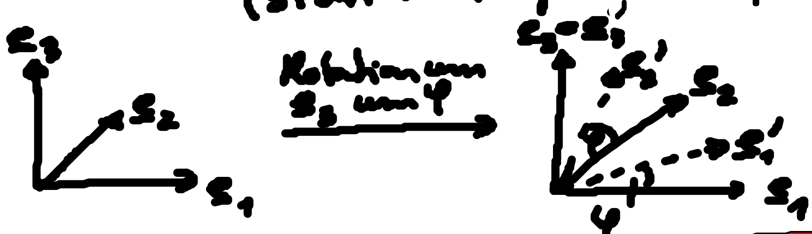
$\underline{e}_1'$ in $\{\underline{e}_i\}$

$$\underline{D}(\underline{e}_3, \varphi) = \left[\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j\right] = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0} \\ -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \qquad (2.40)$$

• Bsp 4: <u>Eulersche Winkel</u> (verschiedene Konventionen)

$\longrightarrow$ allg. Orientierung von $\{\underline{e}_i' = R\underline{e}_i\}$

(starrer Körper, Computergraphik)



$\xrightarrow[\text{um } \vartheta]{\text{um } \underline{e}_2'} \underline{e}_1'', \underline{e}_2'', \underline{e}_3''$

$$\xrightarrow[\text{um } \psi]{\text{um } \underline{e}_3''} \underline{e}_1''', \underline{e}_2''', \underline{e}_3''' : \quad \boxed{\underline{D}(\varphi, \vartheta, \psi) = \underbrace{\underline{D}(\underline{e}_3'', \psi)}_{\text{in } \{\underline{e}_i''\}} \; \underbrace{\underline{D}(\underline{e}_2', -\vartheta)}_{\text{in } \{\underline{e}_i'\}} \; \underline{D}(\underline{e}_3, \varphi)} \qquad (2.41)$$

Applet: Webseite ITP $\rightarrow$ Lehre $\rightarrow$ elearning $\rightarrow$ Eulerwinkel

$\longrightarrow$ allg. Drehung / Spiegelung: 3 Winkel (s. Übungen)

• Händigkeit:

(i) Drehungen: Rechtssystem $\rightarrow$ Rechtssystem:

$$\text{Spatprodukt: } \underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = 1 = \begin{vmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \dots & \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \dots & \end{vmatrix}$$

Determinante von $\underline{D}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{1 = |\underline{D}| = \det(\underline{D})} \qquad (2.42)$$

$\longrightarrow \quad \underline{D} \in SO(3)$ ... eigentlich orthogonale Matrizen (nur Rotationen)

(ii) Spiegelung: Rechtssystem $\to$ Linkssystem

$$\boxed{\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = -1 = |\underline{\underline{D}}|} \quad (2.43)$$

- $\underline{\underline{D}} \in O(3)$ ... Punktoperationen
  wichtig zur Klassifizierung von Kristallen
  (kubisch, hexagonale, ... Kristalle)

2.4 Abstrakte Definition eines Vektorraumes

- Grund: (i) „Rechenregeln" für Vektoren
  (ii) „Erweiterung des Vektorbegriffs
- **Def.:** s. Materialien
- **Bsp:** (i) Vektoren für Physiker ($\to$ Kap. 2.1)
  (ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ... „n-Tupel", $a_i \in \mathbb{R}$
  Zeilenvektor

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \dots \text{ Spaltenvektor} \\ \underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ p\underline{a} = (pa_1, \dots, pa_n) \quad , p \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (2.45)$$

$\longrightarrow$ Darstellung von Vektoren bzgl. Basis ($\to$ Kap 2.1.1)

(iii) $n \times m$ - Matrizen $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($\to$ Kap. 2.2)

$$\left.\begin{array}{l} [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}]_{ij} := A_{ij} + B_{ij} \\ [p\underline{\underline{A}}]_{ij} := pA_{ij} \end{array}\right\} (2.21)$$

(iv) entsprechend. $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n \times m}$

(v) Polynome n-ten Grades

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ äquivalent zu $(n+1)$-Tupel $\in \mathbb{R}^{n+1}$

$\longrightarrow$ Taylorentwicklung

$\longrightarrow$ Legendrepolynome ($\rightarrow$ Übungen)

2.5 Lineare Unabhängigkeit, Entwicklungssatz

- **Def:** Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ heißen <u>linear unabhängig</u>, falls $\beta_1 \underline{a}_1 + \dots + \beta_n \underline{a}_n = 0$ nur für $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_n = 0$ erfüllt ist, andernfalls heißen sie <u>linear abhängig</u> (2.46)

- **Def:** Die maximale Zahl n linear unabhängiger Vektoren im Vektorraum V heißt eine <u>Basis</u> in V. n heißt <u>Dimension</u> von V (2.47)

- <u>Entwicklungssatz</u>: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ … Basis in V

  $\longrightarrow$ eindeutige Entwicklung: $\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{e}_i$ (2.48)

- Bsp: (i) Vektoren für Physiker ($\longrightarrow$ Kap. 2.1.1)

  (ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, \dots 0)$, … $\underline{e}_n = (0, 0 \dots 1)$

  (iii) $\mathbb{R}^{n \times m}$, klar!

  (iv) Polynome: $\underline{e}_0 = 1$, $\underline{e}_1 = x$, $\underline{e}_2 = x^2$, …