

2.6 Euklidischer Vektorraum

• Warum? „Länge von/Winkel zwischen Vektoren“
Messen!

• Def:

Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen V und einem Skalarprodukt = inneres Produkt

$\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$(A1) \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \quad \dots \text{Symmetrie}$$

$$(A2) \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$$

$$(A3) \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = \underline{0} \quad \dots \text{positive Definitheit}$$

$$(A4) (p\underline{a}) \cdot \underline{b} = p(\underline{a} \cdot \underline{b}), \quad p \in \mathbb{R} \quad \left. \vphantom{(A4)} \right\} \text{Linearität}$$

$$(A5) (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$$

(2.48)

Sprechweise: „ \cdot “ ist
symmetrische (A1)
positiv-definite (A2/3)
bilineare (A4/5)
Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

• Messen!

(i) Länge, Betrag, Norm von \underline{a} : $a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$ (2.49)

(ii) \underline{a} „steht senkrecht auf“ \underline{b} , falls $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ (2.50)

• Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in V ist

Orthonormal-Basis, wenn

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \quad \dots \text{normiert, Einheitsvekt.} \\ 0, & i \neq j \quad \dots \text{orthogonal} \end{cases} \quad (2.51)$$

Kronecker-Symbol ($i, j = 1, \dots, n$)

Bem: Erzeugung von Orthonormal-Basis aus beliebiger Basis \rightarrow Gram-Schmidt oder Orthogonalisierungsverfahren \rightarrow Übungen

Bsp 1: Vektoren für Physiker (\rightarrow Kap. 2.1)

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi$$



Bsp 2: \mathbb{R}^n : $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ (2.52) (\rightarrow Kap. 2.1.1)

Bsp 3: $\mathbb{R}^{n \times m}$: $\underline{A} \cdot \underline{B} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ij}$ (2.53)

$$\stackrel{(2.53)}{=} \text{Sp}(\underline{A} \underline{B}^t)$$

Bsp 4: Polynome: $p_1(x), p_2(x)$

$$p_1 \cdot p_2 = (p_1, p_2) = \int_{-1}^1 p_1(x) p_2(x) dx \quad (2.54)$$

kontinuierlicher Index

2.7 Erweiterungen

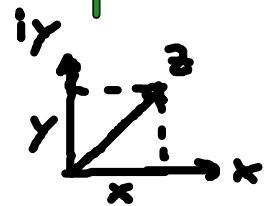
Erinnerung: \mathbb{C} .. komplexe Zahlen

$$\underline{z} = x + iy \in \mathbb{C} \text{ mit } i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1 \quad (2.55)$$

$x \in \mathbb{R}$.. Realteil
 $y \in \mathbb{R}$.. Imaginärteil

$\underline{z}^* = x - iy$.. konjugiert komplex zu \underline{z}

$|\underline{z}|^2 = \underline{z} \underline{z}^* = x^2 + y^2$.. Betrag von \underline{z}



für Vektorraum V über \mathbb{C} : Verallgemeinerung

Def:

Unitärer Vektorraum =

komplexer V & (hermitesches) Skalarprodukt

$\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

$$(A1') \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{a})^* \quad \dots \text{hermitesch}$$

(2.56)

$$\left. \begin{aligned}
 (A2) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} &\geq 0 \\
 (A3) \quad \underline{a} \cdot \underline{a} = 0 &\iff \underline{a} = \underline{0} \\
 (A4) \quad (\underline{p}\underline{a}) \cdot \underline{b} &= \underline{p}^* (\underline{a} \cdot \underline{b}), \quad \underline{p} \in \mathbb{C} \\
 (A5) \quad (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} &= \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c} \quad \text{wie in (2.48)}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wie in (2.48)} \\ \text{sesquilinear} \\ \text{im 1. Argument} \end{array}$$

insbesondere: $\underline{a} \cdot \underline{p}\underline{b} = \underline{p}(\underline{a} \cdot \underline{b})$... linear im 2. Argument (2.57)

$$\stackrel{(A4')}{=} (\underline{p}\underline{b} \cdot \underline{a})^* \stackrel{(A4')}{=} [\underline{p}^*(\underline{b} \cdot \underline{a})]^* = \underline{p}(\underline{b} \cdot \underline{a})^* \stackrel{(A4')}{=} \underline{p}(\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad \text{gel}$$

• Sprechweise:

- "." ist hermitesche (A1')
- positiv-definit (A2/3)
- sesquilinear (A4', A4, A5)
- Abbildung: $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

• Schreibweise:

$$\underbrace{\underline{a} \cdot \underline{b}}_{\text{Vektoren}} = (\underline{a}, \underline{b}) = \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle \quad (2.57)$$

Funktionen, All. Brauch

• Bsp: \mathbb{C}^n : $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1^* b_1 + \dots + a_n^* b_n$ (2.58)

• Def: Prähilbertraum $P = V$ mit hermiteschem Skalarprodukt (2.59)

$P \rightarrow V$ über \mathbb{R} : euklidisch V
 $\searrow V$ über \mathbb{C} : unitär V

• Def: Hilbertraum $H =$ vollständiger Prähilbertraum P

↘ alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $e \in P$

Bsp: rationale Zahlen \mathbb{Q} : nicht vollständig
 reelle " \mathbb{R} : vollständig

$$\left. \begin{aligned}
 \pi &\approx 3 \\
 &\approx 3.1 \\
 &\approx 3.14 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\} \in \mathbb{Q}$$

aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

• Anwendung: in $\mathbb{Q}M$: Hilbertraum, gutartiger⁹ Funktionen

Bsp: Legendre Polynome $P_2(x)$, $|x| \leq 1$

$\{1, x, x^2, \dots\} \dots$ Basis im Raum der Polynome/Funktionen auf $[-1, 1]$

Orthogonalisieren $P_2(x)$ [s. Übungen]

NB: $|x| = |\cos \vartheta| \leq 1 \rightarrow \mathbb{Q}M$

3. Lineare Gleichungssysteme & Determinanten

(Details: s. $\mathbb{R}M$)

• Geg: Koeffizientenmatrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und Spaltenvektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Ges: Spaltenvektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, so daß

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$A_{ij} x_j = b_i$$

$\underline{b} = 0 \dots$ homogenes Gleichungssystem

$\underline{b} \neq 0 \dots$ inhomogen

(3.1)

• Anwendungen: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren [s. Kap. 9]
(ii) elektr. Netzwerke

• Fragen: (i) existiert Lösung \underline{x} ?
(ii) ist \underline{x} eindeutig?

Bsp.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$\rightarrow x_1, x_2$ existiert nicht

Gund: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständige Basis im \mathbb{R}^3

• Beschränkung auf $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$!

$$\text{formale Lsg. von (3.1): } \underline{x} = A^{-1} \underline{b} \quad (3.2)$$

Spezialfälle:

$$(i) \ n=2: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur lösbar, falls $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ linear unabh. (l.u.)

Def. Determinante von $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \quad (3.4)$$

Warum: (3.2) $\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\det A \cdot x_1 = b_1 A_{22} - b_2 A_{12}$
 $\det A \cdot x_2 = b_2 A_{11} - b_1 A_{21}$

also: $\underline{b} = \underline{0}$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, nur falls $\det A \neq 0$

$\underline{b} \neq \underline{0}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert eindeutig, nur " "

$$(ii) \ n=3: \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{31} & \dots & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\det A \cdot x_i = c_i (b_k A_{lm})$

Def. Determinante von $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\det A := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

= $\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ Spatprodukt der Zeilenvektoren [S.(2.13)]
 = $\varepsilon_{jkl} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ Spaltenvektoren! (3.6)
 = $\underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} - \underline{\quad} - \underline{\quad} - \underline{\quad}$

... Sarrusche Regel

also: $\det \underline{A} \neq 0 \rightarrow$ Spalten-/Zeilenvekt. l.u.
 $\rightarrow \underline{A}^{-1}$ existiert (3.7)
 $\xrightarrow{(2.5)} \underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$ eindeutig
 $\underline{x} = 0$ für $\underline{b} = 0$

NB: Berechnung von $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$: Cramersche Regel $\rightarrow \underline{A}^{-1}$

(iii) allgemeines n : (3.7) gilt mit

$$\det \underline{A} = \sum_{\text{alle } p} v(p) A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n}$$

$p = (i_1, i_2, \dots, i_n) \dots$ Permutation aus $(1, 2, \dots, n)$

$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } (1, 2, \dots, n) \text{ und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutation} \end{cases}$

... , Verallgemeinerung⁴ des Spat-
produkts!

- Regeln für Determinanten: s. Kopie