# 4. Tensoren 2. Stufe

## 4.1 Einordnung

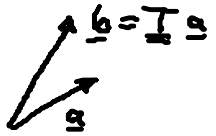
Tensor 0. Stufe $\equiv$ Skalar

" 1. Stufe $\equiv$ Vektor $\underline{a} \in V$, $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ mit $\{\underline{e}_i\}$ ... ONB

" 2. Stufe

## 4.2 Definitionen & dyadisches Produkt

- **Def:** Tensoren $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung eines Vektorraums $V$ in sich: (4.1)



$\underline{\underline{T}} : V \longrightarrow V$

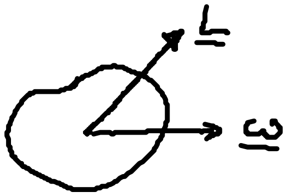
$\underline{\underline{T}} : \underline{a} \longmapsto \underline{b} := \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$ , $\underline{a}, \underline{b} \in V$

Linearität: $\underline{\underline{T}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{\underline{T}}\,\underline{a} + q\,\underline{\underline{T}}\,\underline{b}$ , $p, q \in \mathbb{R}$

- **Bsp 1:** starrer Körper mit Winkelgeschw. $\underline{\omega}$

$\longrightarrow$ Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$ (4.2)

$\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor



vgl. $\underline{p} = m\underline{v}$

- Bsp 2: Ausblick, Verallgemeinerung

  QM: lineare Abbildungen von Fktn. (V mit Dimension n="∞")

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}: V &\longrightarrow V \\ f(x) &\longmapsto g(x) = \hat{H} f(x) \\ \text{Bezeichnung: } \hat{H} &\ldots \text{Operator (statt Tensor)} \end{aligned}\right\} (4.3)$$

Bsp: $\hat{H} f(x) = x\, f(x)$

$$\hat{H} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$$

- Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. Basis in V: → Rechnen!

(1) allgemeine Basis in V (<u>nicht</u> ONB):

Tensoren: Bsp ART

Operatoren: Operator auf V der Polynome

(2) <u>hier</u>: ONB $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ (i.R.: $n=3$)

↪ verwende Skalarprodukt!

$$\underline{e}_i \cdot \Big|\ \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j)\, a_j$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij} &:= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \qquad (4.4) \\ b_i &:= T_{ij}\, a_j \qquad (4.5) \end{aligned}}$$

... Wirkungsweise des Tensors <u>in</u> Komponenten

Schreibweise:

$$\underline{\underline{T}} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (4.5) legt nahe:

Satz: Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraums $V \times V$ der die Basistensoren $\{ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \ , \ i,j = 1,\dots,n \}$ besitzt:

$$\boxed{\underline{\underline{T}} = T_{ij} \ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j} \quad (4.6)$$

… Entwicklung $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!

vgl. $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$

- Rechnen mit (4.6)

<u>Def</u>: Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

besitzt die Eigenschaften: (4.7)

1. Bilinearität:
$$\underline{a} \otimes \underline{b} \overset{\text{Bsp}}{=} (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_i \underline{e}_i) = a_i b_j \ \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$
2. $(\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{c} = \underline{a} \ (\underline{b} \cdot \underline{c}) \ \in V$

Konsistenz?

$$(4.4) \longrightarrow T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}} \underline{e}_j \overset{(4.6)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl} \ \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \ \underline{e}_j$$

$$\overset{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot T_{kl} \underline{e}_k \ (\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j) = T_{kl} \ \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}} \ \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}} = T_{ij}$$

$\longrightarrow$ (4.4) und (4.6) sind konsistent unter (4.7)

- Komponenten von $\underline{a} \otimes \underline{b}$:

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{e}_j \overset{(4.7)}{=} (\underline{e}_i \cdot \underline{a}) \ (\underline{b} \cdot \underline{e}_j)$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i \ b_j} \quad (4.8)$$

Matrixform:
$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_N \\ \vdots & & \vdots \\ a_N b_1 & \dots & a_N b_N \end{pmatrix}$$

# 4.3 Spezielle Tensoren

- transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$: $\xrightarrow[\underline{b}=\underline{e}_i]{\underline{a}=\underline{e}_j}$ $\boxed{\begin{aligned} \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{b} &:= \underline{b}\cdot\underline{\underline{T}}^t\underline{a} \\ T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}}$ (4.9)

...vgl. Matrizen Gl. (2.22)!

- allg. Tensor 2. Stufe: $n=3 \longrightarrow 3\times 3 = 9$ unabh. Komp.

(i) symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = T_{ij}} \quad (4.10) \qquad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

... 6 unabh. Komp.

$T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

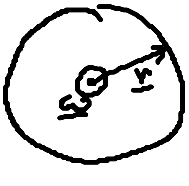
Bsp: $\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor

(ii) antisymmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} &\xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}} \quad (4.11) \qquad \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

... 3 unabh. Komp: $T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Bsp: $\underline{v} = \underline{\omega}\times\underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r}$



mit $\Omega_{ij} = (\underline{\omega}\times ..)_{ij} = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k$, $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

$[\varepsilon_{123} = 1 = -\varepsilon_{132}\,!!]$

- Zerlegung: $\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + T_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}+\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}-\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{antisymmetrisch}} \end{aligned}}$ (4.12)

- Einheitstensor: $\boxed{\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\,\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j}$ (4.13)

denn: $\underline{e}_i\cdot\underbrace{\underline{\underline{1}}\,\underline{e}_j}_{\overset{!}{=}\underline{e}_j} = \underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\qquad \boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{1}}\,\underline{a} &= \underline{a} \end{aligned}}$ (4.13a)

## 4. 4. Algebra (wie bei Matrizen)

- Addition: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ (4.14)
- skalare Multiplikation: $\underline{\underline{C}} = p\,\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\,A_{ij}$ , $p \in \mathbb{R}$ (4.15)
- Multiplikation von Tensoren:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj}\\ &\neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\end{aligned}} \quad (4.16)$$

Beweis: $C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}} \underset{\underset{\underline{\underline{1}}}{\uparrow}}{} \underline{\underline{B}}\, \underline{e}_j$

$= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}} (\delta_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{\underline{B}}\, \underline{e}_j$

$= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\, \underline{e}_k\, \delta_{kl}\, \underline{e}_l \cdot \underline{\underline{B}}\, \underline{e}_j$

$= A_{ik}\, \delta_{kl}\, B_{lj} = A_{ik} B_{kj}$ qed

- Inverser Tensor $\underline{\underline{T}}^{-1}$: $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik}(\underline{\underline{T}}^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$ (4.17)
- Spurbildung: $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{ii}$ (4.18)

## 4.5 Drehungen

- Erinnerung [Kap. 2.3]: $\{\underline{e}_i\} \longrightarrow \{\underline{e}_i'\}$ mit $\underline{e}_i' = D_{ij}\, \underline{e}_j$ (2.32)

$$\left.\begin{aligned} D_{ij}\, D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}\right\} (2.33)$$

- aktiver Standpkt.:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehter}} R\underline{\underline{T}} := T_{kl}\, \underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$

$$= T_{kl}\, D_{ki}\, D_{lj}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\xrightarrow{\text{in } \{\underline{e}_i\}} \boxed{\begin{aligned}[R\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl}\, D_{ki}\, D_{lj} \\ &= D^t_{ik}\, D^t_{jl}\, T_{kl}\end{aligned}} \quad (4.19)$$

- passiver Standpkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_i'\}$ ?

also: $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\, \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

→ Trafo von Tensorkomp.

$$T_{ij}' \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j' = T_{kl}\, \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}}\, \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j')}_{D_{jl}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{T_{ij}' = D_{ik} D_{jl} T_{kl}} \qquad (4.20)$$

$$\xrightarrow{\text{zeige!}} \boxed{T_{ij} = D^{+}_{ik} D^{+}_{jl} T'_{kl}}$$

## 4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

- Motivation: „Tensor begreifen"

QM: Operator ⟶ Meßgrößen!

- i.f.: $n = 3$! alles reell

bzgl. ONB

- Eigenwertproblem des Tensors/der Matrix $\underline{\underline{T}}$ :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\, \underline{a} = \lambda\, \underline{a}} \qquad (4.21)$$

Suche $\underline{a}$ so, daß $\underline{\underline{T}}\, \underline{a} \parallel \underline{a}$ !

$\lambda$ … Eigenwert (EW) zu $\underline{a}$ … Eigenvektor (EV)

- Bsp: Drehimpuls starrer Körper

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega} \longrightarrow \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}^{(i)} = \Theta^{(i)}\, \underline{\omega}^{(i)}$$

⟶ $\underline{L} \parallel \underline{\omega}^{(i)}$ ! „stabile" Rotationen!

· Bestimmung: (4.21) $\longrightarrow \boxed{(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})\, \underline{a} = 0}$ (4.22)

... homogenes LGS!!!

Kap-3: (4.22) besitzt nichttriviale Lsg. $\underline{a} \neq 0$ falls

$(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})^{-1}$ <u>nicht</u> existiert $\longrightarrow$

$$\boxed{\det\left[\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}}\right] = 0 = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix}} \quad (4.23)$$

... charaktisches Polynom von $\underline{\underline{T}}$

= kubische Gl. für $\lambda$