4. Tensoren 2. Stufe

4.1 Einordnung

Tensor 0. Stufe = Skalar

" 1. Stufe = Vektor $\underline{a} \in V$, $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ mit $\{\underline{e}_i\}$ ... ONB

" 2. Stufe

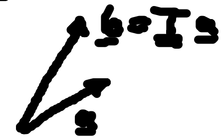
4.2 Definitionen & dyadisches Produkt

- **Def:** Tensoren $\underline{T}$ 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung eines Vektorraums V in sich:

  $\underline{T}: V \longrightarrow V$ (4.1)

  $\underline{T}: \underline{a} \longmapsto \underline{b} := \underline{T}\,\underline{a}$, $\underline{a}, \underline{b} \in V$

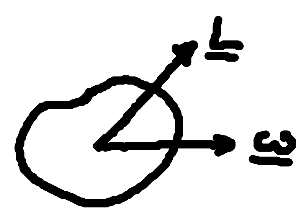
  Linearität: $\underline{T}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\,\underline{T}\,\underline{a} + q\,\underline{T}\,\underline{b}$, $p, q \in \mathbb{R}$



- **Bsp 1:** starrer Körper mit Winkelgeschw. $\underline{\omega}$

  $\longrightarrow$ Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\Theta}\,\underline{\omega}$ (4.2)

  $\underline{\Theta}$ ... Trägheitstensor



vgl. $\underline{p} = m\underline{v}$

- Bsp 2: Ausblick, Verallgemeinerung
  QM: lineare Abbildungen von Fktn. (V mit Dimension n="∞")

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}: V \longrightarrow V \\ \quad f(x) \longmapsto g(x) = \hat{H} f(x) \end{array}\right\} \quad (4.3)$$

Bezeichnung: $\hat{H}$ ... Operator (statt Tensor)

Bsp: $\hat{H} f(x) = x\, f(x)$

$\hat{H} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$

- Komponenten von $\underline{\underline{T}}$ bzgl. Basis in V: ⟶ Rechnen!

(1) allgemeine Basis in V (nicht ONB):

Tensoren: Bsp ART

Operatoren: Operator auf V der Polynome

(2) hier: ONB $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ (i.R.: $n=3$)

↪ verwende Skalarprodukt!

$$\underline{e}_i \cdot \,|\, \underline{b} = \underline{\underline{T}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$$

$$\xrightarrow[\text{Linearität}]{\underline{a} = a_j \underline{e}_j} \quad b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j)\, a_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} T_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j & (4.4) \\ b_i := T_{ij}\, a_j & (4.5) \end{array}}$$

... Wirkungsweise des Tensors
in Komponenten

Schreibweise:

$$\underline{\underline{T}} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

• (4.5) legt nahe:

Satz: $\boxed{\text{Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraums } V \times V \text{ der die Basistensoren } \{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j\ ,\ i,j = 1,\dots,n\} \text{ besitzt.} \quad \underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (4.6)}$

... Entwicklung $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!

vgl. $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$

• Rechnen mit (4.6)

<u>Def</u>: Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V \times V$$

besitzt die Eigenschaften:

1. Bilinearität:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \overset{\text{Bsp}}{=} (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j) = a_i b_j\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

2. $(\underline{a} \otimes \underline{b})\underline{c} = \underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V$ (4.7)

Konsistenz?

$$(4.4) \longrightarrow T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j \overset{(4.6)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j$$

$$\overset{(4.7)}{=} \underline{e}_i \cdot T_{kl}\, \underline{e}_k\, (\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j) = T_{kl}\, \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{ik}}\, \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{lj}} = T_{ij}$$

$\longrightarrow$ (4.4) und (4.6) sind konsistent unter (4.7)

• Komponenten von $\underline{a} \otimes \underline{b}$:

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{e}_j \overset{(4.7)}{=} (\underline{e}_i \cdot \underline{a})\,(\underline{b} \cdot \underline{e}_j)$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i\, b_j} \quad (4.8)$$

Matrixform: $\underline{a} \otimes \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_N \\ \vdots & & \vdots \\ a_N b_1 & \cdots & a_N b_N \end{pmatrix}$

4.3 Spezielle Tensoren

• transponierter Tensor $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{b} &:= \underline{b}\cdot\underline{\underline{T}}^t\,\underline{a} \\ \xrightarrow[\underline{b}=\underline{e}_i]{\underline{a}=\underline{e}_j} \quad T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}} \qquad (4.9)$$

...vgl. Matrizen Gl. (2.22)!

• allg. Tensor 2. Stufe: $n=3 \longrightarrow 3\times 3 = 9$ unabh. Komp.

(i) symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} = T_{ij}} \qquad (4.10) \qquad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

... 6 unabh. Komp. $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

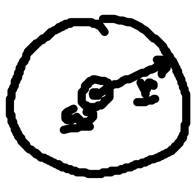
Bsp. $\underline{\underline{\Theta}}$ ... Trägheitstensor

(ii) antisymmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(4.9)} T_{ji} &= -T_{ij} \\ \longrightarrow T_{11} = T_{22} &= T_{33} = 0 \end{aligned}} \qquad (4.11) \qquad \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

... 3 unabh. Komp: T_{12}, T_{13}, T_{23}

Bsp: $\underline{v} = \underline{\omega}\times\underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r}$



mit $\Omega_{ij} = (\underline{\omega}\times ..)_{ij} = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k$, $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$

$[\varepsilon_{123} = 1 = -\varepsilon_{132}\,!!]$

• Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}+\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}-\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{antisymmetrisch}} \end{aligned}} \qquad (4.12)$$

• Einheitstensor:

$$\boxed{\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j} \qquad (4.13)$$

denn: $\underline{e}_i \cdot \underbrace{\underline{\underline{1}}\,\underline{e}_j}_{\underline{\underline{1}}\,\underline{e}_j} = \underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij}$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{1}}\,\underline{a} &= \underline{a} \end{aligned}} \qquad (4.13a)$$

4.4. Algebra (wie bei Matrizen)

- Addition: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ (4.14)
- skalare Multiplikation: $\underline{\underline{C}} = p\,\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\,A_{ij}$, $p \in \mathbb{R}$ (4.15)
- Multiplikation von Tensoren:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \\ \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \end{array}} \quad (4.16)$$

Beweis: $C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\underset{\uparrow\,\underline{\underline{1}}}{}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{e}_j$

$= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}(\delta_{kl}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\underline{\underline{B}}\,\underline{e}_j$

$= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_k\;\delta_{kl}\;\underline{e}_l \cdot \underline{\underline{B}}\,\underline{e}_j$

$= A_{ik}\,\delta_{kl}\,B_{lj} = A_{ik} B_{kj}$ qed

- Inverser Tensor $\underline{\underline{T}}^{-1}$: $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik}(\underline{\underline{T}}^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$ (4.17)
- Spurbildung: $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{ii}$ (4.18)

4.5 Drehungen

- Erinnerung [Kap. 2.3]: $\{\underline{e}_i\} \longrightarrow \{\underline{e}_i'\}$ mit $\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j$ (2.32)

$$\left.\begin{array}{l} D_{ij}\,D_{kj} = \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{1}} \end{array}\right\} (2.33)$$

- aktiver Standpkt.:

$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehter}} R\underline{\underline{T}} := T_{kl}\,\underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$

$= T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

$$\xrightarrow{\text{in } \{\underline{e}_i\}} \boxed{\begin{array}{l} [R\underline{\underline{T}}]_{ij} = T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj} \\ \qquad = D^t_{ik}\,D^t_{jl}\,T_{kl} \end{array}} \quad (4.19)$$

- passiver Standpkt.: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_i'\}$?

also: $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\, \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkomp.

$$T_{ij}' \overset{(4.4)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j' = T_{kl} \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j')}_{D_{jl}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \\ T_{ij} &= D_{ik}^{+} D_{jl}^{+} T_{kl}' \end{aligned}} \quad (4.20)$$

(zeige! $\longrightarrow$ zweite Zeile)

4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

- Motivation: „Tensor begreifen“

  QM: Operator $\longrightarrow$ Meßgrößen!

- i.f.: $n=3$! alles reell

- Eigenwertproblem des Tensors / der Matrix $\underline{\underline{T}}$ (bzgl. ONB):

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\, \underline{a} = \lambda\, \underline{a}} \quad (4.21)$$

Suche $\underline{a}$ so, daß $\underline{\underline{T}}\,\underline{a} \parallel \underline{a}$!

λ ... Eigenwert (EW) zu $\underline{a}$ ... Eigenvektor (EV)

- Bsp: Drehimpuls starrer Körper

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega} \longrightarrow \underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}^{(i)} = \Theta^{(i)} \underline{\omega}^{(i)}$$

$\longrightarrow \underline{L} \parallel \underline{\omega}^{(i)}$! „stabile“ Rotationen!

· Bestimmung: (4.21) $\longrightarrow$ $\boxed{(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})\,\underline{a} = 0}$ (4.22)

... homogenes LGS!!!

Kap. 3: (4.22) besitzt nichttriviale Lsg. $\underline{a} \neq 0$ falls

$(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}})^{-1}$ <u>nicht</u> existiert $\longrightarrow$

$$\boxed{\det[\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{1}}] = 0 = \begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}} \quad (4.23)$$

... charakteristisches Polynom von $\underline{\underline{T}}$

= kubische Gl. für λ