

4.6 Diagonalisierung eines symmetrischen Tensors

• Eigenwertproblem:

$$\boxed{\underline{\mathbb{I}} \underline{a} = \lambda \underline{a}} \quad (4.21)$$

• Bestimmung von λ, \underline{a} :

$$(4.21) \rightarrow \boxed{(\underline{\mathbb{I}} - \lambda \underline{1}) \underline{a} = 0} \quad (4.22)$$

... homogenes LGS!!

Kap. 3: (4.22) besitzt nichttriviale Lsg. $\underline{a} \neq 0$ falls

$(\underline{\mathbb{I}} - \lambda \underline{1})^{-1}$ nicht existiert \rightarrow

$$\boxed{\det[\underline{\mathbb{I}} - \lambda \underline{1}] = 0 = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix}} \quad (4.23)$$

... charakteristisches Polynom von $\underline{\mathbb{I}}$

= kubische Gl. für λ

\rightarrow 3 Lösungen = EW: $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ [i.a. 1 reelle, 2 konjugiert komplexe Lsg.]
mit EU: $\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}$

• Berechnung: (i) systematisch:

1. Löse (4.23) $\rightarrow \lambda^{(i)}$

2. Löse (4.21) mit $\lambda^{(i)} \rightarrow \underline{a}^{(i)} \neq 0$

(ii) Rate $\underline{a}^{(i)} \xrightarrow{(4.21)} \lambda^{(i)}$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda^{(1)} = 1$$

$$\underline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(2)} = 2$$

$$\underline{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda^{(3)} = 0$$

• Satz: $\boxed{\text{Falls reelles } \underline{\mathbb{I}} \text{ symmetrisch} \rightarrow \lambda^{(i)} \in \mathbb{R}} \quad (4.24)$

Beweis: $\left. \begin{aligned} \underline{a}^* \cdot \underline{I} \underline{a} &= \lambda \underline{a} \\ \underline{a} \cdot \underline{I} \underline{a}^* &= \lambda^* \underline{a}^* \end{aligned} \right\} \ominus$ mit * ... komplex konjugiert

$$\underbrace{\underline{a}^* \cdot \underline{I} \underline{a}}_{\underline{I}^t} - \underbrace{\underline{a} \cdot \underline{I} \underline{a}^*}_{\underline{I}^t \underline{I}} = 0 = \underbrace{(\lambda - \lambda^*)}_{2 \operatorname{Im} \lambda} \underbrace{\underline{a}^* \cdot \underline{a}}_{\neq 0} \rightarrow \lambda = \lambda^* \text{ ged}$$

Satz: Die EV eines reellen, symmetrischen Tensors \underline{I} sind orthogonal: $\underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}$ (4.25)

Beweis: (1) $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$

$$\left. \begin{aligned} \underline{a}^{(j)} \cdot \underline{I} \underline{a}^{(i)} &= \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} \\ \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{I} \underline{a}^{(j)} &= \lambda^{(j)} \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} \end{aligned} \right\} \ominus$$

mit $\underline{I} = \underline{I}^t \rightarrow 0 = (\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}) \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} \xrightarrow{\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}} \underline{a}^{(i)} \perp \underline{a}^{(j)}$

(2) Entartung: $\lambda^{(i)} = \lambda^{(j)}$

- (i) isotroper Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$
- (ii) axial-symmetrischer Tensor: $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$, Richtung $\underline{a}^{(3)}$ ausgerechnet

Wähle orthogonale EV im
 (i) 3-dim.
 (ii) 2-dim.
 Entartungsraum

• Darstellung von \underline{I} in EU-Basis $\{\underline{a}^{(i)}\}$:

Ges: $\underline{I} = T'_{ij} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)}$ (4.26)

mit $\underline{I} \underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)}, \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}$

$$\rightarrow T'_{ij} \stackrel{(4.6)}{=} \underline{a}^{(i)} \cdot \underbrace{\underline{I} \underline{a}^{(j)}}_{\lambda^{(j)} \underline{a}^{(j)}} \rightarrow \begin{aligned} T'_{ij} &= \lambda^{(i)} \delta_{ij} \\ \underline{I}' &= \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \\ \underline{I} &= \sum_i \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

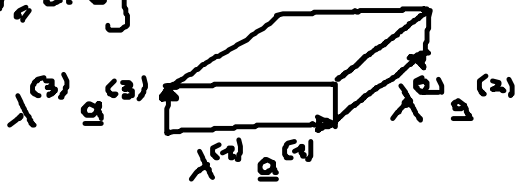
... Diagonalgestalt!

• Trafo. der Tensor komp. auf $\{\underline{a}^{(i)}\}$: [Kap. 4.5]

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{e}_j \\ T'_{ij} &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \end{aligned} \right\} (4.28)$$

graphische Darstellung von I:

(1) Ziegel:



(2) Ellipsoid: Halbachsen $\parallel g^{(i)}$
mit Länge $\lambda^{(i)}$

} Tensor besitzt
Orientierung im
Raum!

5. Euklidischer Raum

Motivation:

(1) Grundlage der Newtonschen Mechanik:

Physikal. Anschauungsraum
= euklidischer Raum = flacher Raum

→ euklidische Geometrie gilt: [vertraute Geometrie]

Bsp. a) Winkelsumme im Dreieck = 180°

(nicht auf der Kugel:



b) Satz von Pythagoras

c) Parallelenaxiom:

„In einer Ebene α gibt es zu jeder Geraden g und jedem Pkt. S (außerhalb von g) genau eine Gerade, die zu g parallel ist und durch S geht“

(2) Unterscheide:
 Physikal. Anschauungsraum A mit Punkten P und
 Vektorraum V_P („Tangentenraum“), angeheftet an
 jedem Pkt. P , in dem die physikal. Vektoren wirken.

- gekrümmter Raum:

absolut wichtig zum Verständnis der ART



- flacher Raum: A & V_P bilden affinen Raum

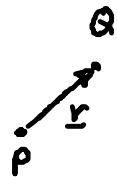
[s. Kap. 5.1]

5.1 Definition

• Def:

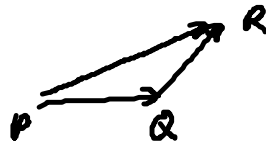
Ein Punkttraum A mit Pkten P, Q, \dots und ein Vektorraum V bilden einen affinen Raum, wenn gilt:

(1) $P, Q \in A \mapsto$ Verbindungsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{PQ} \in V$



(2) „Abtragen“ eines Vektors $\underline{r} \in V$ von P
 führt zu genau einem Q

(3) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (Dreiecksregel)



(4) $\overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow P = Q$

(5.1)

• Def:

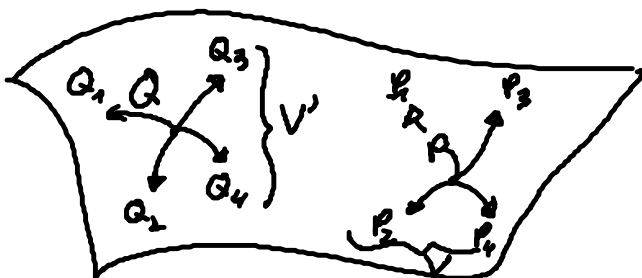
Ist V ein euklidischer Vektorraum, so bildet er
 mit A einen euklidischen Raum.

(5.2)

\rightarrow Abstandsmessung in A über Skalarprodukt in V :

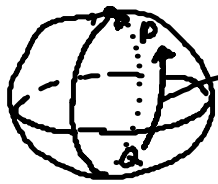
$$d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \quad (5.3)$$

• gekrümmte Räume \neq affinen Räume:



i.a.
 $V' \neq V$

• Bsp: Kugeloberfläche:



\vec{PQ} auf Großkreis

Nullelement $0 = \vec{N}$ nicht eindeutig

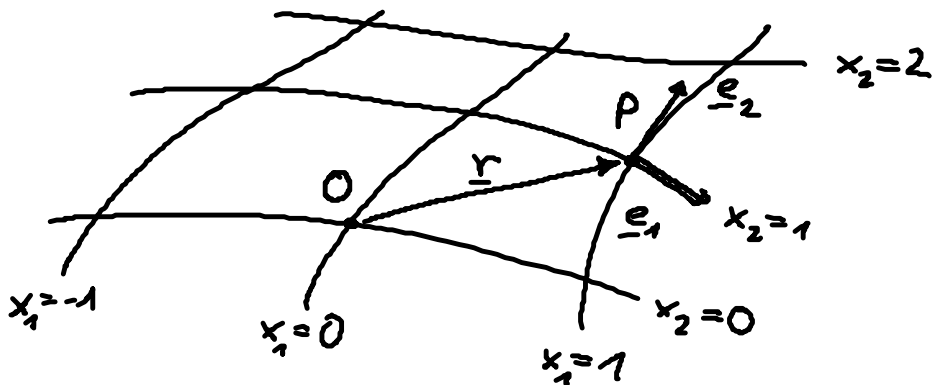
→ kein V

5.2 Koordinatensysteme

• Motivation: Bahnkurve eines Massenpunktes } angeben
 Skalar-/Vektorfelder im Raum }

• Ort von Punkt $P \leftrightarrow$ Koordinatentripel (x_1, x_2, x_3)

a) allgemeine (krümmelige) Koordinaten:



Netz von beliebigen
 Koordinatenlinien

Ort von $P: (x_1, x_2, x_3)$ mit Ortsvektor $\underline{r} = \vec{OP} \in V$

• natürliche (Koordinaten) Basis für Vektorraum V_P angeheftet

an P :

normierte Tangentialvektoren \underline{e}_i an x_i -Linien ($x_j = \text{konst.}, j \neq i$)

$|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$ $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ i.a. nicht ortsfest

• Berechnung? \rightarrow Einschub: partielle Ableitung

(i) Skalarfeld: $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, x_3)$ Bsp. T

Änderung / partielle Ableitung entlang x_i :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\substack{x_j = \text{konst.} \\ i \neq j}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + \varepsilon, \dots) - f(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \quad (5.3)$$

Schreibweise: $\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \partial_i f(\underline{r})$

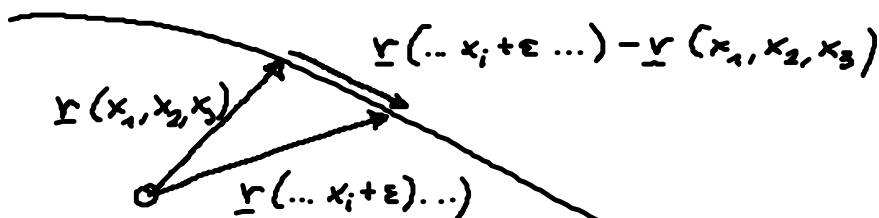
(ii) Vektoren:

$$\left. \frac{\partial \underline{v}(\underline{r})}{\partial x_i} \right|_{\substack{x_j = \text{konst.} \\ i \neq j}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\dots, x_i + \varepsilon, \dots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \quad (5.4)$$

(iii) Produkt-, Kettenregel eb. gültig

• Tangentialvektor an x_i -Koord. Linie:

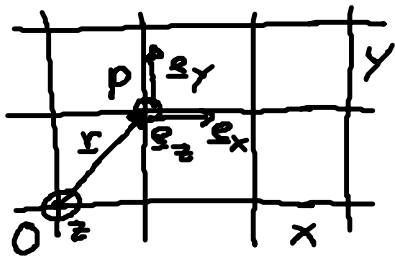
$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\dots, x_i + \varepsilon, \dots) - \underline{v}(x_1, x_2, x_3)}{\varepsilon} \quad (5.5)$$



$$\Rightarrow \underline{e}_i = \left| \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \right|^{-1} \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \quad (5.6)$$

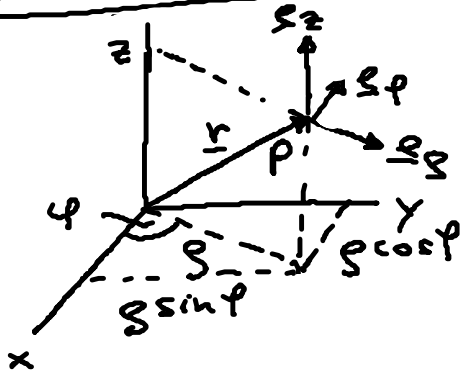
• NB: In RT, $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

b) kartesische Koordinaten



• $\{e_x, e_y, e_z\}$ ortsfest
 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, i, j = x, y, z$ } $\rightarrow r = x_i e_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (5.7)

c) Zylinderkoordinaten:



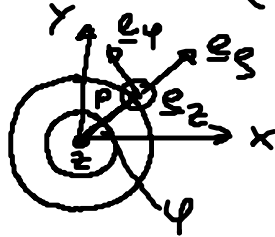
$p: (\rho, \varphi, z)$

Polarkoord. in der xy-Ebene

$$r = \rho \cos \varphi e_x + \rho \sin \varphi e_y + z e_z$$

$$= \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

• Koordinatenbasis:
 ortsabhängig!



$$e_\rho = \left| \frac{\partial r}{\partial \rho} \right|^{-1} \frac{\partial r}{\partial \rho} \stackrel{(5.8)}{=} \frac{\partial r}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} \stackrel{(5.8)}{=} \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right|^2 = \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \rho^2 \rightarrow e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, i, j = \rho, \varphi, z$

• NB: $r = \rho e_\rho + z e_z$ (5.10)