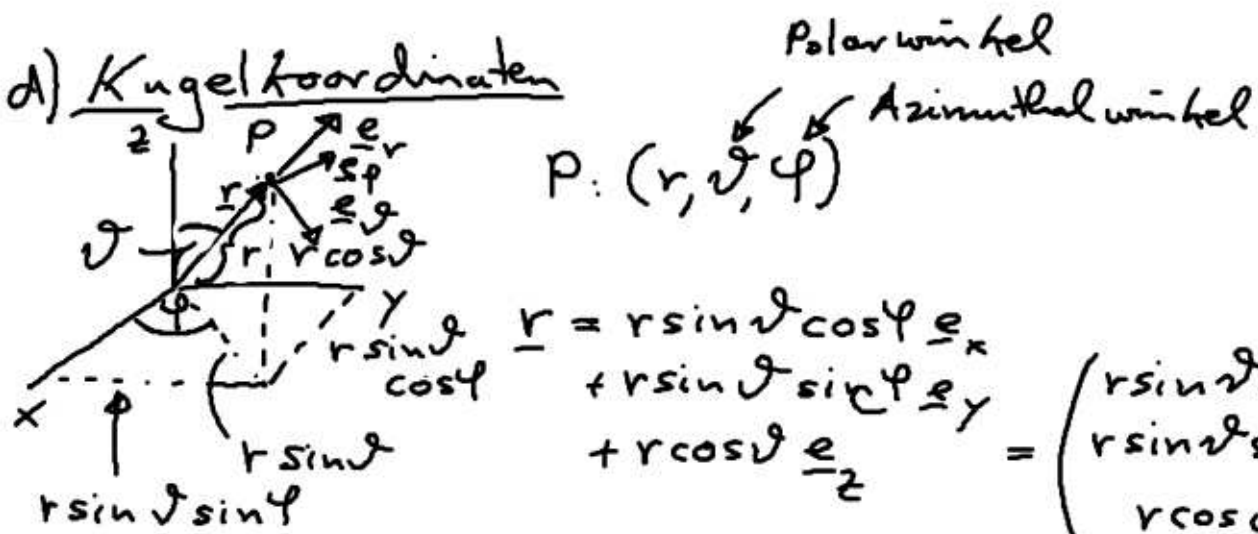


d) Kugelkoordinaten



$$\underline{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \underline{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \underline{e}_y + r \cos \vartheta \underline{e}_z = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

- Koordinatenbasis: ortsabhängig
→ Übungen
- NB: $\underline{r} = r \underline{e}_r(\vartheta, \varphi)$ (5.12)

5.3 Bahnkurven

• Teilchenbahn im Raum:

(i) Zeit $t \mapsto \underbrace{x_1(t), x_2(t), x_3(t)}_{\text{Koordinatentripel}} \quad (5.13)$

$x_i \dots$ kartesischen, Zylinder-, Kugelkoordinaten

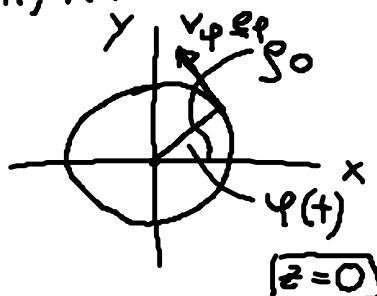
(ii) $t \mapsto \underbrace{\underline{r}(t)}_{\text{Ortsvektor}}$

Bsp: (i) gerade Bahn:
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_x t + x_0 \\ y(t) &= v_y t + y_0 \\ z(t) &= v_z t + z_0 \end{aligned} \right\} (5.15)$$

\swarrow konst. Geschw. (s. später) \nwarrow Ort bei $t=0$

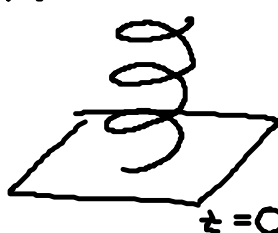
$$\vec{r}(t) = \underline{v} t + \underline{r}_0 \quad (5.16)$$

(ii) Kreisbahn:
$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{s_0} t = \omega t \\ z(t) &= 0 \end{aligned} \right\} (5.17)$$



"Kreisfrequenz"
Winkelgeschw.

(iii) Helix:

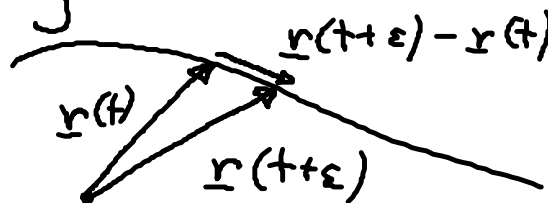


$$\left. \begin{aligned} s(t) &= s_0 \\ \varphi(t) &= \frac{v_\varphi}{s_0} t = \omega t \\ z(t) &= v_z t \end{aligned} \right\} (5.18)$$

Teilchengeschwindigkeit:

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \underline{\dot{r}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)}{\varepsilon} \quad (5.19)$$

(i) Tangente an Bahnkurve



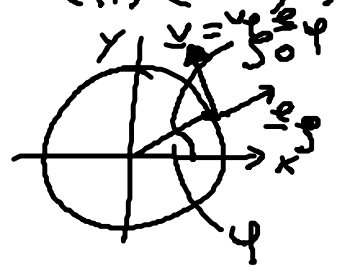
$$(ii) v(t) = |\underline{v}(t)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\underline{r}(t+\varepsilon) - \underline{r}(t)|}{\varepsilon}$$

(iii) Einschub: Rechenregeln für Vektordifferenzial

Bsp: (i) (5.15)/(5.16): $\underline{r}(t) = \underline{v}t + \underline{r}_0 \rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}$ (5.20)

Abl. der Komp.

(ii) (5.17): $\underline{r}(t) = \rho_0 \underline{e}_\rho \rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}_0}_{=0} \underline{e}_\rho + \rho_0 \dot{\underline{e}}_\rho$



$\dot{\underline{e}}_\rho$: (1) Überlegung:

$\frac{d\underline{e}_\rho}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\underline{e}_\rho(t+\epsilon) - \underline{e}_\rho(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[\varphi(t+\epsilon) - \varphi(t)] \underline{e}_\varphi(t)}{\epsilon} = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$

(2) Rechnen

$\underline{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{e}}_\rho = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$ (5.9)

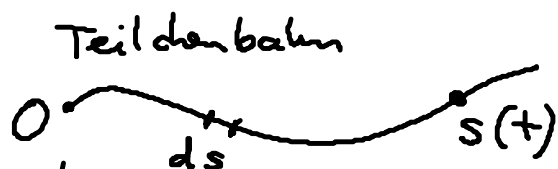
$\rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \rho_0 \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi = v_\varphi \underline{e}_\varphi$ (5.21)

(iii) (5.18) $\underline{r}(t) = \rho_0 \underline{e}_\rho + v_z t \underline{e}_z \rightarrow$

Helix:

$\frac{d\underline{r}}{dt} = v_\varphi \underline{e}_\varphi + v_z \underline{e}_z$ (5.22)

• Bogenlängen - Darstellung



$ds = \underbrace{v}_{|\dot{s}(t)|} dt$... zurückgelegte Weglänge in dt (S.23)

$\rightarrow s(t) = \int_0^t ds' = s' \Big|_0^t = \int_0^t v(t') dt'$... zurückgelegte Weglänge zur Zeit $t =$ Bogenlänge (S.24)

Bahnkurve

$\underline{r}(t) \stackrel{(S.24)}{=} \underline{r}(t(s)) = \underline{r}(s)$ (S.25)

[Physiker notation:

$\underline{r}(t), \underline{r}(s)$... dieselbe Bahn, unterschiedliche Funktionen]

~~$\underline{r}(t) = t^2$
 $\underline{r}(s) = s^2$~~

Kettenregel

Bilde: $\frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \frac{dt}{ds}$
 $\qquad \qquad \underline{v}(t) \qquad \frac{1}{v(t)}$

$\rightarrow \boxed{\frac{d\underline{r}(s)}{ds} = \hat{\underline{t}}, \quad |\hat{\underline{t}}| = 1}$ (S.25)

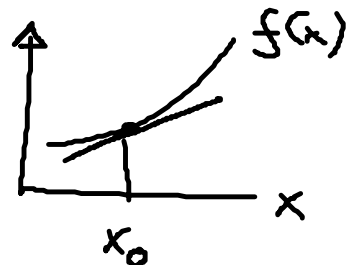
• NB: Neben t oder s andere Kurvenparameter möglich

Bsp: $\omega t = \varphi$

6. Vektoranalysis

• Motivation:

räumliche Veränderungen von physikal. Größen
 → Differenzieren/Ableiten
 ≙ Erkunden lokaler Veränderungen



6.1 Skalarfelder

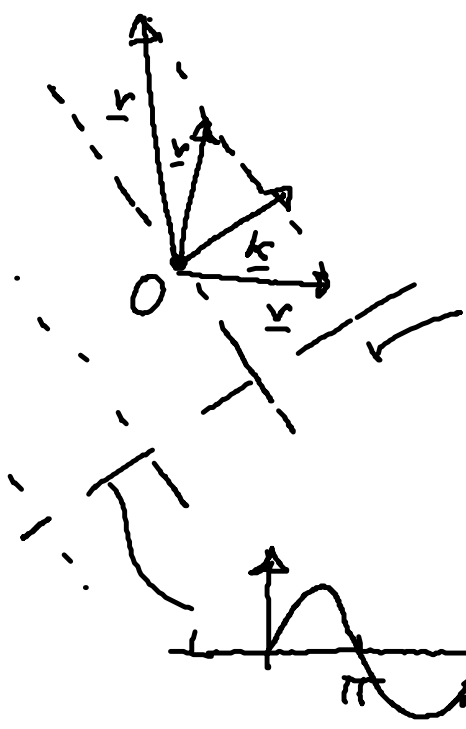
• Skalarfeld $f(\underline{r})$: ordnet jedem Raum pkt. $P[(x_1, x_2, x_3)$
 ein Skalar $\in \mathbb{R}$ zu oder \underline{r}

Bsp: Temp. T , Dmcht ρ (in einer Flüssigkeit)
 Massendichte ρ (z.B. in der Atmos-
 phäre),
 potentielle Energie $U \dots$

• Bsp:

(1) ebene Welle: $f(\underline{r}) \sim \sin(\underbrace{\underline{k} \cdot \underline{r}}_{\text{"Phase"}})$ (6.1)

Wellen-
 vektor (z.B. Schallwellen
 in Flüssigkeiten,
 Festkörpern]



Für $\underline{v} \cdot \underline{k} = \text{const}$ ein:
 Fläche konstanter Phase
 $\underline{k} \cdot \underline{r}$

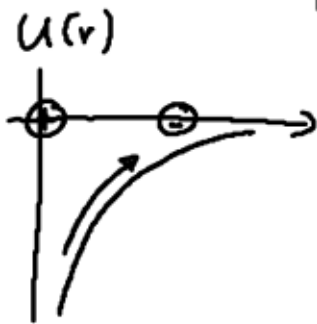
Bsp: $\underline{k} = k \underline{e}_x \rightarrow \underline{r} \cdot \underline{k} = kx$

(2) Kugelsymmetrisches (Potential) feld: $U = U(r)$

• „Äquipotential“ flächen: $U(r) = \text{const}$
 $\rightarrow r = \text{const.}$
 $\hat{=} \text{Kugelflächen}$
um $r=0$

Kugelkoord.:
Abstand vom
Nullpkt.

Bsp: $U(r) \sim \frac{1}{r}$



... potentielle Energie einer
Test { masse im Feld
ladung
eines Massepunktes
einer Pkt. Ladung