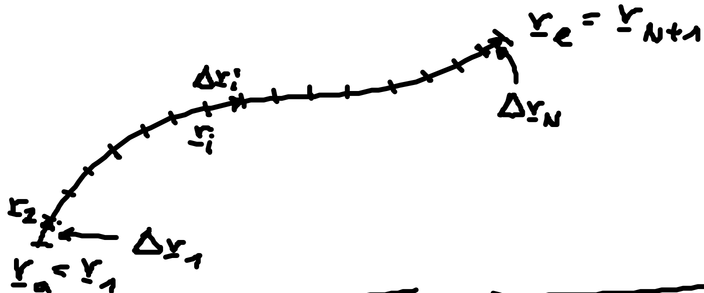
7. Integration von Feldern

7.1 Linien-/Wegintegrale

• Bahnkurve C:



Differenzvektor:

$$\boxed{\underline{r}_e - \underline{r}_a = \sum_{i=1}^{N} \Delta \underline{r}_i \longrightarrow \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} d\underline{r} \qquad \Delta \underline{r}_i \longrightarrow d\underline{r} \xrightarrow{N\to\infty} \underline{0}} \qquad (7.1)$$

• Berechnung mit Parameterdarstellung von C: (s. Kap. 5.3)

(1) Zeit t: $\quad \underline{r} = \underline{r}(t)\,, \quad d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}(t)} dt \qquad (7.2)$

(5.19)

$$\longrightarrow \quad \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(t_e) - \underline{r}(t_a)$$
$$= \int_{t_a}^{t_e} \underline{v}(t)\, dt \qquad (7.3)$$

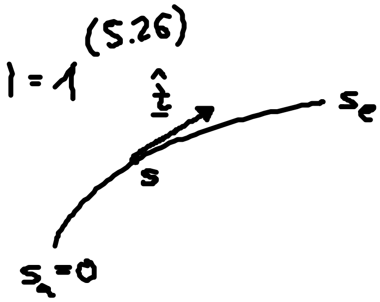
in kartesischen Koord.:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \ \& \ (7.3) \longrightarrow \ 1D \text{ Integrale}$$

(2) Bogenlänge s: $\quad \underline{r} = \underline{r}(s)$, $d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\hat{\underline{t}},\ |\hat{\underline{t}}|=1\ (5.26)} ds$ (7.4)

$$\longrightarrow \underline{r}_e - \underline{r}_a = \underline{r}(s_e) - \underline{r}(s_a)$$

$$= \int_{s_a=0}^{s_e} \hat{\underline{t}}(s)\, ds \quad (7.5)$$



- Integrale vom Typ:

$$\boxed{W = \int_C \underbrace{\underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}}} \quad (7.6)$$

„Tangentialkomp. von $\underline{a}$ an C mal $ds = |d\underline{r}|$"

[vgl. Wirbel]

Bsp: von Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$ verrichtete Arbeit entlang Weg C:

$$\boxed{W = \sum_i \underbrace{\underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\text{Kraftkomp. in Wegrichtung mal Weg}} \xrightarrow{\Delta \underline{r}_i \to d\underline{r}} \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r}} \quad (7.7)$$

Berechnung:

(1) Zeitdarstellung: $\quad W \overset{(7.2)}{=} \int_{t_a}^{t_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{v}(t)}_{\text{Funktion von } t} dt$ (7.8)

$\longrightarrow$ 1D Integral

(2) Bogenlängen-Darstellung:

$$W \overset{(7.4)}{=} \int_{s_a}^{s_e} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(s)) \cdot \hat{\underline{t}}(s)}_{\text{Funktion von } s} ds \quad (7.9)$$

$\longrightarrow$ 1D Integral

Bsp: $\underline{F}(\underline{r}) = k\,\underline{r}$ ... 3D-Federkraft!

Weg von $\underline{r}_a = 0$ entlang $\underline{r} = x\,\underline{e}_x$ nach $\underline{r}_e = x_e\,\underline{e}_x$

$\longrightarrow \quad s = x$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{F}(\underline{r}(s)) = k x\, \underline{e}_x \\ d\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{dx}}_{\underline{e}_x} dx = \underline{e}_x\, dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = kx\, dx \\ \longrightarrow W = \int_{x=0}^{x_e} kx\, dx = \frac{k}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x_e} \\ \qquad = \frac{k}{2} x_e^2 \,! \end{array}$$

- geschlossene Kurve C:

$$\boxed{\oint_C \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad \text{.... Zirkulation}} \qquad (7.10)$$

NB: vgl. Deutung von $\mathrm{rot}\,\underline{a}$ in Kap. 6.6, Gl. (6.56)

7.2 Flächenintegrale

- Typ der Integrale:

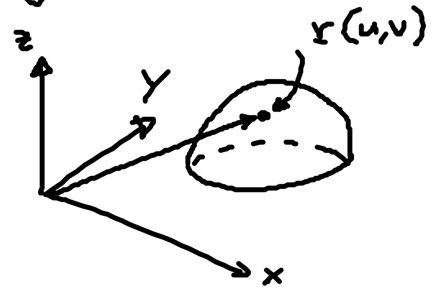
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Fluß von } \underline{a}(\underline{r}) \text{ durch Fläche } F: \\ \quad Q = \int_F \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f} \quad \text{mit Flächenelement} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad d\underline{f} = df\, \hat{\underline{\nu}} \end{array}} \qquad (7.11)$$

NB: vgl. Deutung von $\underline{\nabla} \cdot \underline{a}$ in Kap. 6.5

Normalenvektor auf F bei $\underline{r}$ mit $|\hat{\underline{\nu}}| = 1$

- Punkte auf Fläche F im Raum: $\quad \underline{r} = \underline{r}\underbrace{(u,v)}_{\text{2 Variablen!}}$ (7.12)

Bsp:



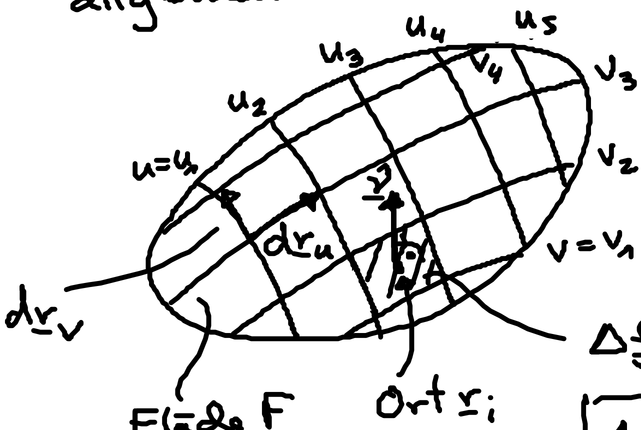
Fläche über x,y-Ebene

$\xrightarrow{\text{möglich}} (u,v) = (x,y)$

Bsp: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

... Halbkugel mit $z > 0$ und Radius $= 1$

allgemeine Fläche:



$u = \text{konst.}$ oder $v = \text{konst.}$

$\longrightarrow$ Netz von Linien auf F

$$\Delta \underline{f}(\underline{r}_i) = \Delta f \, \hat{\underline{\nu}}, \quad |\hat{\underline{\nu}}| = 1$$

Achtung: alle $\hat{\underline{\nu}}$ auf F in denselben Halbraum!

(7.13)

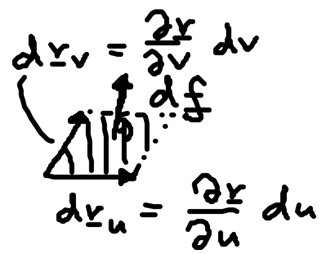
- Fluß von $\underline{a}(\underline{r})$ durch Fläche F:

$$Q = \sum_{\text{„}i \in F\text{"}} \underline{a}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{f}(\underline{r}_i) \qquad (7.14)$$

$$\xrightarrow[\Delta \underline{f} \to d\underline{f}]{} \int \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f}(\underline{r})$$

- Berechnung:

Flächenelement $d\underline{f}$:



(7.15)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} d\underline{f} &= d\underline{r}_u \times d\underline{r}_v \\ &= \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du \, dv \end{aligned}} \qquad (7.16)$$

(i) $d\underline{f} \perp d\underline{r}_v, d\underline{r}_u$

(ii) $|d\underline{f}|$ = Fläche des von $d\underline{r}_v$, $d\underline{r}_u$ aufgespannten Parallelogramms!

$$\xrightarrow{\text{in (7.11)}} \boxed{Q = \int \underline{a}(\underline{r}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right) du \, dv} \qquad (7.17)$$

F

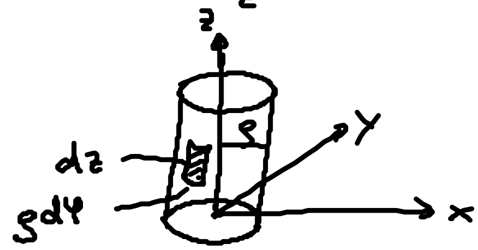
… Doppelintegral (s. HM)

- Bsp. für $d\underline{f}$:

(1) Fläche $\parallel$ xy-Ebene: $(u,v) = (x,y) \longrightarrow d\underline{f} = \underline{e}_z\, dx\, dy$

(2) Zylinderoberfläche um $\underline{e}_z$ mit Radius ρ:

$(u,v) = (\varphi, z)$



$$\underline{r} = \rho\, \underline{e}_\rho + z\, \underline{e}_z = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \rho = \text{konst.}$$

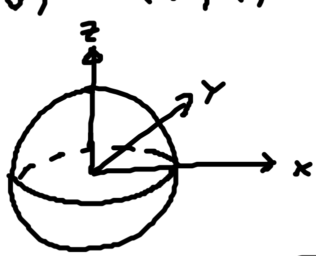
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} &= \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\, \underline{e}_\varphi \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_z \end{aligned}\right\} \quad d\underline{f} \overset{(7.16)}{=} \rho\, \underbrace{\underline{e}_\varphi \times \underline{e}_z}_{\underline{e}_\rho}\, d\varphi\, dz$$

$$\longrightarrow \boxed{d\underline{f} = \underline{e}_\rho\, \rho\, d\varphi\, dz} \quad (7.19)$$

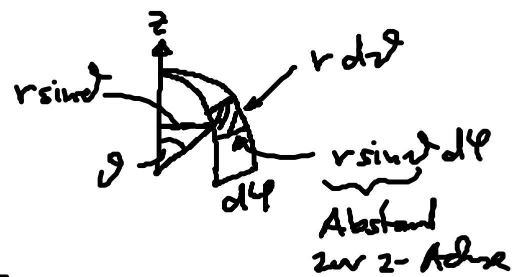
… $d\underline{f}$ auf Zylinderoberfläche

(3) Kugeloberfläche um $\underline{r} = 0$ mit Radius r:

$(u,v) = (\vartheta, \varphi)$



$\longrightarrow$



o.B.
$$\boxed{\begin{aligned} d\underline{f} &= \underline{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \\ &= -\underline{e}_r\, r^2\, d\cos\vartheta\, d\varphi \end{aligned}} \quad (7.19)$$

$d\cos\vartheta = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

… $d\underline{f}$ auf Kugeloberfläche

- geschlossene Fläche ∂V um Volumen V.

$$\boxed{\int_{\partial V} \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{f}} \qquad (7.20)$$

$d\underline{f}$ ... zeigt <u>immer</u> aus V hinaus!

... Fluß aus V heraus

- Bsp: Oberfläche einer Kugel mit Radius r:
  nimm $\underline{a}(\underline{r}) = \underline{e}_r$!

$$\longrightarrow \partial V = \int_{\partial V} \underline{e}_r \cdot d\underline{f}\, \underline{e}_r = \int_{\partial V} df \overset{(7.19)}{=} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi}}_{\text{einfaches Doppelintegral}} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\overset{(\text{hier})}{=} r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= 2\pi r^2 \int_{1}^{-1} -d\cos\vartheta = 2\pi r^2 \int_{-1}^{1} d\cos\vartheta = 2\pi r^2 \cos\vartheta \Big|_{\cos\vartheta=-1}^{1}$$

$$\partial V = 4\pi r^2 !$$

7.3 Satz von Stokes

- <u>Satz</u>: Für Fluß von $\operatorname{rot}\underline{a}$ durch Fläche F gilt:

$$\int_F \operatorname{rot}\underline{a} \cdot d\underline{f} = \oint_{C=\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{r} \qquad (7.21)$$

... Zirkulation von $\underline{a}$ entlang Randkurve ∂F von F

wichtig: (1) $\operatorname{rot}\underline{a}$ definiert auf ganz F!
(2) Umlaufsinn von $C = \partial F$ über Rechte-Hand-Regel für $d\underline{f}$ von F