7.5. Gaußscher Satz

· Satz: Für Quellen von $\underline{a}$ in V gilt:

$$\int_V \mathrm{div}\,\underline{a}\,dV = \int_{\partial V} \underline{a}\cdot d\underline{f} \qquad (7.36)$$

... Fluß durch Oberfläche ∂V

wichtig: (1) $\mathrm{div}\,\underline{a}$ definiert in ganz V

(2) $d\underline{f}$ zeigt aus V heraus

· Beweis:

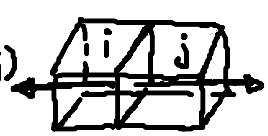
1. Nähere V durch „viele" Quader ΔV_i 

„keine Zeichnung"

2. $$\int_V \mathrm{div}\,\underline{a}\,dV = \sum_{i} \mathrm{div}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\,\Delta V_i$$ (über alle Quader)

3. $$\mathrm{div}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\,\Delta V_i = \text{“}\oint_{\partial(\Delta V_i)} \underline{a}\cdot d\underline{f}^{(i)}\text{”}$$ [vgl. Kap. 6.5, Gl. (6.43)]

4. benachbarte Vol. elemente:

$d\underline{f}^{(j)}$  $d\underline{f}^{(i)} = -d\underline{f}^{(j)}$

$$\longrightarrow \quad \underline{a}\cdot\underbrace{d\underline{f}^{(i)}}_{-d\underline{f}^{(j)}} + \underline{a}\cdot d\underline{f}^{(j)} = 0$$

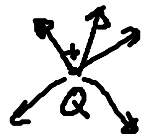
also: in $\sum_i \mathrm{div}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\,\Delta V_i = \sum_i \text{“}\int_{\partial(\Delta V_i)} \underline{a}\cdot d\underline{f}^{(i)}\text{”}$

nur „frei liegende" Oberflächen der ΔV_i tragen bei

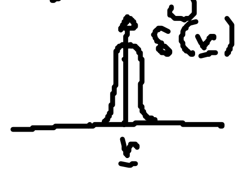
$\longrightarrow$ Oberfläche ∂V von V

$$\longrightarrow \sum_i \int_{\partial(\Delta V_i)} \underline{g} \cdot d\underline{f}^{(i)} = \int_{\partial V} \underline{g} \cdot d\underline{f} \quad \text{qed}$$

• Anwendung: $\underline{E}$- Feld einer Pkt. ladung Q



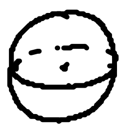
Maxwell: $\operatorname{div} \underline{E} \sim \underbrace{Q\,\delta(\underline{r})}_{\text{Ladungsdichte}}$ (7.37)



mit $\int \delta(\underline{r})\, dV = 1$

(i) $\boxed{\underline{E} = E(r)\, \underline{e}_r}$! (7.38)

(ii) $\int_{V_K} \operatorname{div} \underline{E}\, dV \underset{(7.37)}{\sim} \int_{V_K} Q\, \delta(\underline{r}) = Q$



Kugel um $r=0$

(iii) $\int_{\partial V_K} \underline{E} \cdot d\underline{f} \overset{(7.38)}{=} \int_{\partial V_K} E(r)\, \underline{e}_r \cdot \underline{e}_r\, df$

$$= \int_{\partial V_K} E(r)\, df \underset{\text{konst.}}{\overset{r=}{=}} E(r) \int_{\partial V_K} df = E(r)\, 4\pi r^2$$

Gauß: (ii) = (iii) $\longrightarrow$ $\boxed{E(r) \sim \frac{Q}{r^2}}$! (7.39)

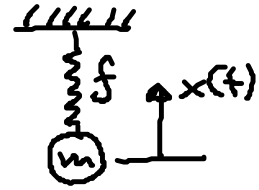
8. Bemerkungen zu Differentialgleichungen (DGL)

• Auswahl von DGLs

8.1. Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

- Motivation:

harmonischer Oszillator <u>ohne</u> Reibung:



Bewgl.: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, $\omega^2 = \frac{f}{m}$

Lösung: (rechne nach!)

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t \\ &= c \sin(\omega t - \alpha) \\ \text{mit } & c_1 = c\cos\alpha, \quad c_2 = -c\sin\alpha \end{aligned}} \tag{8.2}$$

- allgemein:

inhomogene DGL: Funktion $x(t)$, $D^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[D^{(n)} + a_{n-1} D^{(n-1)} + a_{n-2} D^{(n-2)} + \ldots + a_1 D + a_0\right] x(t) = f(t) \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \\ &\longleftrightarrow \mathcal{D}\, x(t) = f(t) \end{aligned}} \tag{8.3}$$

$\mathcal{D}$: Differentialoperator!

- Gehe ins Komplexe:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\, z(t) \longrightarrow z(t) = x(t) + i y(t) \\ f(t) &= \mathrm{Re}\, h(t) \longrightarrow h(t) = f(t) + i g(t) \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Löse also $\boxed{\mathcal{D} z(t) = h(t)}$ (8.5)

$\longrightarrow$ reelle Lsg.: $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$

- homogene DGL: $\mathcal{D} z(t) = 0$

Lösungsansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ mit $D^{(k)} z(t) \sim \lambda^k \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}$

in $\mathcal{D} z(t) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0} \tag{8.6}$$

... charakteristische Polynom

Fundamentalsatz der Algebra (o.B.): (8.7)

$$\boxed{P(\lambda) = 0 \text{ besitzt genau } n \text{ Lösungen } \lambda_k \in \mathbb{C},\ k = 0, \ldots, n-1}$$

$$\left[P(\lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda - \lambda_i) \right]$$

$\longrightarrow$ allgemeinste homogene Lsg. von (8.5) $[h(t) = 0]$

$$\boxed{z_{hom}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, e^{\lambda_k t}} \quad (8.8)$$

.. beliebige Superposition der Einzellösungen

NB: bei Entartung (o.B.): $\lambda_k = \lambda_l$: $e^{\lambda_k t}$, $(1 + c t) e^{\lambda_k t}$

zu bestimmen

· inhomogene DGL: $\quad \mathcal{D} z(t) = h(t)$

allg. Lsg. (o.B) $\quad \boxed{z(t) = \underbrace{z_{hom}(t)}_{\text{s. Gl. (8.8)}} + \underbrace{z_{part}(t)}_{\text{eine „partikuläre" Lsg.}}} \quad (8.9)$

Bem: $z_{hom}(t)$ generiert die gesamte Lösungsschar aus $z_{part}(t)$

· Bestimme c_k aus Rand- / Anfangsbedingungen

Bsp: $n = 2$ (t ... Zeit) $\quad x(0) = x_0$, $\underbrace{D^{(1)} x(t) \Big|_{t=0}}_{\text{„Geschw.!"}} = x_1$

$\longrightarrow$ 2 Gl. für 2 Unbekannte c_0, c_1 !

8.2 DGL mit getrennten Variablen

· allgemein: für $y(x)$, $' = \frac{d}{dx}$

$$\boxed{g(y)\, y' = f(x) \; , \quad g(y) \neq 0} \quad (8.10)$$

Lsg.: $g(y)\,dy = f(x)\,dx$

... „Trennung der Variablen"

$\xrightarrow[\text{integrieren}]{\text{nach}}$ $\boxed{\begin{aligned} \int g(y)\,dy &= \int f(x)\,dx + C \\ G(y) &= F(x) + C \end{aligned}}$ (8.11)

Konstante

... Integral von (8.10)

= implizite Gl. für $y(x)$

- Beispiele:

(i) homogene lineare DGL: $\left[g(y) = \frac{1}{y}\right]$

$$\boxed{y' = f(x)\,y} \quad (8.12)$$

Lsg.: $\int \frac{dy}{y} = \int f(x)\,dx + C_1$

$\longrightarrow \ln y = F(x) + C_1 \quad | e^{\cdots}$

$$\boxed{y(x) = C\,e^{F(x)}} \quad (8.13)$$

(ii) inhomogene lineare DGL zu (8.12):

$$\boxed{y' = f(x)\,y + g(x)} \quad (8.14)$$

allgemeine Lsg.: $\boxed{y(x) = \underbrace{y_{hom}(x)}_{\text{s. Gl. (8.13)}} + y_{part}(x)}$ (8.15)

Bestimme $y_{part}(x)$:

(1) Raten!! [absolut legitim]

(2) „Variation der Konstanten" in y_{hom} aus Gl. (8.13)

Ansatz: $y_{part} = \tilde{C}(x)\,e^{F(x)}$ (8.16) in (8.14)

mit $y'_{part} = \tilde{C}'\,e^{F(x)} + \tilde{C}(x)\,f(x)\,e^{F(x)}$ in (8.14)

$$\longrightarrow \quad \tilde{C}' e^{F(x)} = g(x)$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{C}'(x) = g(x)\, e^{-F(x)}$$

$$\longrightarrow \quad d\tilde{C} = g(x)\, e^{-F(x)}\, dx$$

$$\boxed{\tilde{C} = \int g(x)\, e^{-F(x)}\, dx + C_0} \quad (8.17)$$

$$\longrightarrow \quad y_{part} = \tilde{C}(x)\, e^{F(x)} \;!$$