Wh:

Zeitabhängige gemeinsame Wahrsch.
(Verbundwahr.)

$p(x_1,t_1;x_2,t_2;\dots,x_n,t_n)$

für den Fall $d=1$ (eine Zufallsvariable), diskrete Zeit

Bedingte Wahrsch.:

$P(A|B)$ Wahrsch. für das Auftreten des Ereignisses A, unter der Bedingung, dass B eingetreten ist

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ ← gemeinsame Wahrsch.

hier:

$p(x_{n+1},t_{n+1};\dots;x_{n+m},t_{n+m}|x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} bei t_{n+1}; x_{n+2}, t_{n+2}, etc.

.. unter der Bedingung, daß x_1 zu t_1, x_2 zu t_2 ... x_n zu t_n vorlag

$(t_1<t_2<\dots<t_n<t_{n+1}<\dots t_{n+m})$

es gilt:

$$p(x_{n+1},t_{n+1};\dots;x_{n+m},t_{n+m} \,/\, x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$$

$$= \frac{p(x_1,t_1;\dots\dots;x_{n+m},t_{n+m})}{p(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)}$$

Spezialfall $m=1$: $p(x_{n+1},t_{n+1} \,/\, x_1,t_1;\dots,x_n t_n)$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} bei t_{n+1}, falls bei t_1 der Wert x_1 …, bei t_n der Wert x_n vorlag „Übergangswahrscheinlichkeit"

Klassifizierung stochastischer Prozesse

a) Reiner Zufallsprozeß:

$$p(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n) = p(x_1,t_1)\cdot p(x_2,t_2)\cdot \dots \cdot p(x_n,t_n)$$

Verbundwahrsch.

$$\Rightarrow p(x_{n+1},t_{n+1} \,|\, x_1,t_1;\dots;x_n,t_n) \quad \text{Übergangswahrsch.}$$

$$= p(x_{n+1},t_{n+1})$$

Einzelwahrsch.

$\Rightarrow$ komplett unabhängig von Vergangenheit und auch der Gegenwart

d.h. keine Korrelation von Ereignissen zu versch. Zeitpunkten

b) Markov-Prozeß:

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} \mid x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)$$

$$= p(x_{n+1}, t_{n+1} \mid x_n, t_n)$$

„Zukunft" „Gegenwart"

also:

Nicht die ganze Vergangenheit $t_1, \ldots, t_n$ bestimmt die Zukunft (t_{n+1}), sondern nur die Gegenwart!

man sagt:

Der Markov-Prozeß ist ein stochastischer Prozeß „ohne Gedächtnis"

$\Leftrightarrow$ Die Übergangswahrsch. aus dem Zustand bei t_n zum Zustand bei t_{n+1} ist „unabhängig von der Vorgeschichte"

<u>Folgerung für die Verbundwahrsch.</u>:

$$p(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) \overset{\text{allg.}}{=} p(x_n, t_n \mid x_1, t_1; \ldots, x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\cdot\, p(x_1, t_1; \ldots; x_{n-1}, t_{n-1})$$

Markov

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$$

Schritt wiederhole

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \cdot p(x_1, t_1; \dots; x_{n-2}, t_{n-2})$$

Fortfahren

$$\Rightarrow p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \cdot p(t_{n-2}, x_{n-2} | t_{n-3}, x_{n-3}) \cdots p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1)$$

Die Verbundwahrsch. ist also vollständig durch die Übergangswahrsch. sowie die Einzelwahrsch. $p(x_1, t_1)$ bestimmt.

Man „hangelt" von Zeitschritt t_m zum Zeitschritte t_{m+1}

durch Multiplikation mit den entsprechende Übergangswahrsch.

$\rightarrow$ „Markov-Kette"

Wir summieren (bzw. integrieren für kontinuierliche Variablen)

Wir betrachten nun konkret die Verbundwahrsch. für 3 Zeiten

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3) = p(x_3,t_3|x_2,t_2) \cdot p(x_2,t_2|x_1,t_1) \cdot p(x_1,t_1) \quad (*)$$

→ Integration über Zustand x_2 (d.h. über alle möglichen Werte die x bei t_2 annehmen)

$$\underbrace{\int dx_2\, p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3)}_{p(x_1,t_1;x_3,t_3)} = \int dx_2\, p(x_3,t_3|x_2,t_2)\, p(x_2,t_2|x_1,t_1) \cdot p(x_1,t_1)$$

Dividiere durch $p(x_1,t_1)$

$$\Rightarrow \boxed{p(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int dx_2\, p(x_3,t_3|x_2,t_2) \cdot p(x_2,t_2|x_1,t_1)}$$

⟹ Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Interpretation:

Die Übergangswahrsch. von einem Ausgangzustand x_1 bei t_1 zum Endzustand x_3 bei t_3 entspricht dem Produkt der Übergangswahrsc. von Ausgangszustand zu einem „Zwischenzustand" x_2 bei t_2 und der Übergangswahrsch. vom Zwischen- zum Endzustand

— summiert bzw. integriert über alle mögliche Zwischenzustände

Von hier aus werden wir später die Mastergleichung herleiten

1.3. Stationäre Stochast. Prozeße

Def.:

Beim stationären Prozeß sind alle Eigenschaft invariant bei einer Verschiebung der Zeitachse

d.h. $p(x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n)$

$$= p(x_1,t_1+\varepsilon ; \dots ; x_n, t_n+\varepsilon)$$

Verbundwahrsch.

ε beliebig

Folgerungen:

a) Die Einzelwahrsch. $p(x_1,t)$ ist zeitunabhängig und ebenso alle Momente $M_\nu = \langle X^\nu \rangle$

d.h. $p(x_1,t) = p(x_1)$

$M_\nu(t) = M_\nu$

b) Die zweizeitige Verbundwahrsch. hängt nur von der Zeitdifferenz ab!

$$p(x_1,t_1 ; x_2,t_2) = p(x_1,0 ; x_2,t_2-t_1)$$

wobei der Zeitnullpunkt willkürlich festgelegt werden kann

Damit ergibt sich für die Übergangswahrsch.:

$$p(x_2,t_2 \,|\, x_1,t_1) \overset{\text{allg}}{=} \frac{p(x_1,t_1 ; x_2,t_2)}{p(x_1,t_1)} \underset{\text{Stationarität}}{=} \frac{p(x_1,0 ; x_2,t_2-t_1)}{p(x_1)}$$

$$= p(x_2,t_2-t_1 \,|\, x_1,0)$$

also hängt ~~di~~ auch die Übergangswahrsch. nur von der Zeitdifferenz ab!

Wir betrachten nun die Autokorrelationsfunktion

$$G(t_1, t_2) = \langle (\underbrace{x_1}_{x(t_1)} - \overbrace{M_1(t_1)}^{\langle x \rangle_{t_1}})(\underbrace{x_2}_{x(t_2)} - \overbrace{M_1(t_2)}^{\langle x \rangle_{t_2}}) \rangle$$

Korrelation der Ereignisse zu zwei verschiedenen Zeitpunkten

Der zweizeitige Mittelwert kann über die zweizeitige Verbundwahrsch. ausgedrückt werden.

Es gilt also:

$$G(t_1, t_2) = \int dx_1 \int dx_2 \, (x_1 - M_1(t_1))(x_2 - M_1(t_2)) \cdot p(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

Stationarität:

$$M_1(t_1) = \text{const}$$

$$M_1(t_2) = \text{const}$$

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$$

Damit folgt:

$$G(t_1, t_2) = G(t_2 - t_1) \quad !$$

Auch die Autokorrelationsfunktion hängt nur von der Zeitdifferenz ab.!

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften

Annahme:

x ist kontinuierliche ~~Varia~~ Variable
und ist nur in einem Zeitintervall
$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ von Null verschieden

$$\tilde{x}_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i\omega t}\, x(t)$$

umgekehrt: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{x}_T(\omega)\, e^{-i\omega t}$

$x(t)$ reell $\Rightarrow$ $\tilde{x}_T^*(\omega) = \tilde{x}_T(-\omega)$

Spektrale Leistungsdichte

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \langle |\tilde{x}_T(\omega)|^2 \rangle$$

$\hat{=}$ Intensität, die im Mittel auf das Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$ fällt

Umschreiben:

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left\langle \int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i\omega t} x(t) \int_{-T/2}^{T/2} dt'\, e^{-i\omega t'} x(t') \right\rangle$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt'\, e^{i\omega(t-t')} \langle x(t) x(t') \rangle$$

Stationarität

$$\Rightarrow \langle x(t) x(t') \rangle = \langle x(0) x(\tau) \rangle$$

mit $\tau = t' - t$

da auch der Exponentialfaktor nur von τ abhängt, machen wir folgende Ersetzung:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \longrightarrow T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau$$

T ist groß ~~ist~~ gegen den Bereich, indem $\langle x(0) x(\tau) \rangle \neq 0$

$$\Rightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \underbrace{\langle x(0)\, x(\tau) \rangle}_{\text{Autokorrelationsfunktion}} e^{-i\omega\tau}$$

(entspricht unserer Def. von $g(\tau)$ falls die Mittelwerte verschwinden)

$$\Rightarrow \boxed{S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, e^{-i\omega\tau} \, g(\tau)}$$

Wiener-Khinchin-Theorem