

Wk:

Zeitabhängige gemeinsame Wahrsch.
(Korrelationsmatrix)

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n)$$

für den Fall $d=1$
(eine Zufallsvariable),
diskret Zeit

Bedingte Wahrsch.:

$P(A|B)$ Wahrsch. für das Auftreten des Ereignisses A
unter der Bedingung, dass B eingetreten ist
 $\left(= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right)$ ← gemeinsame Wahrsch.

hier:

$$p(x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} \mid x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} bei t_{n+1} ; x_{n+2} bei t_{n+2} , etc.

.. unter der Bedingung, dass x_1 zu t_1 ,
 x_2 zu t_2 ... x_n zu t_n vorlag

$$(t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{m+1})$$

es gilt:

$$p(x_{m+1}, t_{m+1}; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} / x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \\ = \frac{p(x_1, t_1; \dots; x_{m+1}, t_{m+1})}{p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)} \quad \left. \vphantom{\frac{p(x_1, t_1; \dots; x_{m+1}, t_{m+1})}{p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}} \right\} \text{Übergangswahrsch.}$$

Spezialfall $m=1$: $p(x_{m+1}, t_{m+1} / x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$
 Wahsch. für das Auftreten von x_{m+1} bei t_{m+1} , falls bei t_1 der Wert x_1, \dots, x_n , bei t_n der Wert x_n vorliegt.
 „Übergangswahrscheinlichkeit“

Klassifizierung stochastischer Prozesse

a) Reiner Zufallsprozess:

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1) \cdot p(x_2, t_2) \cdot \dots \cdot p(x_n, t_n)$$

Verbindlich.

$$\Rightarrow p(x_{m+1}, t_{m+1} / x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \quad \text{Übergangswahsch.}$$

$$= p(x_{m+1}, t_{m+1})$$

Einmalwahsch.

d.h. keine Korrelation
 von Ereignissen zu versch.
 Zeitpunkten

Komplett
 unabhängig von
 Vergangenheit und auch
 der Gegenwart

b) Markov-Prozess.

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

$$= p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n)$$

\uparrow Zukunft \uparrow „Gegenwart“

also:

Nicht die ganze Vergangenheit t_1, \dots, t_n bestimmt die Zukunft (t_{n+1}), sondern nur die Gegenwart!

man sagt:

Der Markov-Prozess ist ein stochastischer Prozess „ohne Gedächtnis“

⇔ Die Übergangswahrsch. aus dem Zustand bei t_n zum Zustand bei t_{n+1} ist „unabhängig von der Vergangenheit“

Folgerung für die Verkettungswahrsch.:

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \stackrel{\text{allg.}}{=} p(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\text{Markov} \rightarrow = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_n, t_n; \dots; x_{n-2}, t_{n-2})$$

$$\text{Schritt wiederhole} \rightarrow = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \cdot p(x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_{n-3}, t_{n-3})$$

Fortfahren

$$\Rightarrow p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\cdot p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2})$$

$$\cdot p(x_{n-2}, t_{n-2} | x_{n-3}, t_{n-3})$$

$$\dots \cdot p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1)$$

Die Verbundwahrsch. ist also vollständig durch die Übergangswahrsch. sowie die Erhaltungswahrsch. $p(x_i, t_i)$ bestimmt.
 Man "hängelt" von Zeitstufe t_m zum Zeitstufe t_{m+1}

durch Multiplikation mit der entsprechenden Übergangswahrsch.

\rightarrow "Markov-Kette"

Wir summieren (bzw. integrieren für kontinuierliche Variablen)

Wir betrachten nun konkret die Verteilungswahrsch. für 3 Zeiten

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_3, t_3 | x_2, t_2) \cdot p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1) \quad (*)$$

→ Integration über Zustand x_2 (d.h. über alle möglichen Wdh der x bei t_2 annehmen)

$$\int dx_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = \int dx_2 p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1)$$

Dividiere durch $p(x_1, t_1)$

$$\Rightarrow p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 p(x_3, t_3 | x_2, t_2) \cdot p(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

⇒ Chapman-Kolmogorow-Gleichung

Interpretation:

Die Übergangswahrsch. von einem Ausgangszustand x_1 bei t_1 zum Endzustand x_2 bei t_2 entspricht dem Produkt der Übergangswahrsch. von Ausgangszustand zu einem 'Zwischenzustand' x_2 bei t_2 und der Übergangswahrsch. von Zwischen- zum Endzustand

— Summiert bzw. integriert über alle mögliche Zwischenzustände

Von hier aus werden wir später drei Markteigenschaften herleiten

1.3. Stationäre Markov. Prozesse

Def.:

Beim stationären Prozess sind alle Eigenschaften invariant bei einer Verschiebung der Zeitachse

$$\text{d.h. } p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

$$\uparrow = p(x_1, t_1 + \epsilon; \dots; x_n, t_n + \epsilon)$$

Konstantwahrsch. ϵ beliebig

Folgerungen:

a) Die Einzelwahrsch. $p(x_1, t)$ ist zeitunabhängig
und ebenso alle Momente $M_\nu = \langle x^\nu \rangle$
d.h. $p(x_1, t) = p(x_1)$
 $M_\nu(t) = M_\nu$

b) Die zweizeitige Verhändwahrsch.

hängt nur von der Zeitdifferenz ab!

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$$

wobei der Zeitnullpunkt willkürlich festgelegt werden kann

Damit ergibt sich für die Übergangswahrsch.:

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \stackrel{\text{allg.}}{=} \frac{p(x_2, t_2; x_1, t_1)}{p(x_1, t_1)} \stackrel{\text{station.}}{=} \frac{p(x_2, t_2 - t_1; x_1, 0)}{p(x_1)}$$
$$= p(x_2, t_2 - t_1 | x_1, 0)$$

also hängt ~~es~~ auch die Übergangswahrsch.
nur von der Zeitdifferenz ab!

Wir betrachten nun die
Autokorrelationsfunktion:

$$g(t_1, t_2) = \langle \underbrace{(x_1 - M_1(t_1))}_{x(t_1)} \underbrace{(x_2 - M_1(t_2))}_{x(t_2)} \rangle$$

Korrelation der Erträge zu zwei
verschiedenen Zeitpunkten

Der zweizeitige Mittelwert kann über die zweizeitige Verteilung
ausgedrückt werden
Es gilt also:

$$g(t_1, t_2) = \int dx_1 \int dx_2 (x_1 - M_1(t_1)) (x_2 - M_1(t_2)) \cdot p(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

Stationarität:

$$M_1(t_1) = \text{const}$$

$$M_1(t_2) = \text{const}$$

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$$

Damit folgt:

$$g(t_1, t_2) = g(t_2 - t_1) \quad !$$

Auch die Ableitbarkeit
hängt nur von der Zeitdauer ab?

Zusammenhang mit Spektraler Eigenwert

Annahme -

x ist kontinuierliche ~~zeit~~ Variable
und ist nur in einem Zeitintervall

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ von Null verschieden

$$\tilde{x}_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i\omega t} x(t)$$

umgekehrt: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{x}_T(\omega) e^{-i\omega t}$

$x(t)$ reell $\Rightarrow \tilde{x}_T^*(\omega) = \tilde{x}_T(-\omega)$

Spektrale Leistungsdichte

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |\tilde{x}_T(\omega)|^2 \rangle$$

Ξ Intensität, die im Mittel auf das Intervall $[w, w+dw]$ fällt

Umschreiben:

$$S(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i\omega t} x(t) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt' e^{-i\omega t'} x(t') \right\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt' e^{i\omega(t-t')} \langle x(t)x(t') \rangle$$

Stationarität

$$\Rightarrow \langle x(t)x(t') \rangle = \langle x(0)x(\tau) \rangle$$

$$\text{mit } \tau = t' - t$$

da auch die Erwartungswerte nur von τ abhängen, machen wir folgende Ersetzung:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt' \longrightarrow T \int_{-\infty}^{\infty} d\tau$$

T ist groß ~~ist~~ gegen den Bereich, in dem $\langle x(0)x(\tau) \rangle \neq 0$

$$\Rightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \underbrace{\langle x(0)x(\tau) \rangle}_{\text{Autokorrelationsfunktion}} e^{-i\omega\tau}$$

Autokorrelationsfunktion:

(entspricht unserer Def. von $g(\tau)$
falls die Mittelwerte verschwinden)

$$\Rightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} g(\tau)$$

Wiener - Khinchin - Theorem