

6.3. Elektrische Leitfähigkeit

Berechne $f(\underline{r}, \underline{k}, t)$ aus Boltzmannngl.

$$\Rightarrow n(\underline{r}, t) = \int f(\underline{r}, \underline{k}, t) z d^3k \quad \text{Elektronendichte}$$

$z = \frac{2}{(2\pi)^3}$

$$\begin{aligned} \underline{j}(\underline{r}, t) &= \int (-e v_g) f(\underline{r}, \underline{k}, t) z d^3k && \text{elektr. Stromdichte} \\ &= -\frac{e}{\hbar} \int (\nabla_{\underline{k}} E(\underline{k})) f(\underline{r}, \underline{k}, t) z d^3k && \text{(Ladungstransport)} \end{aligned}$$

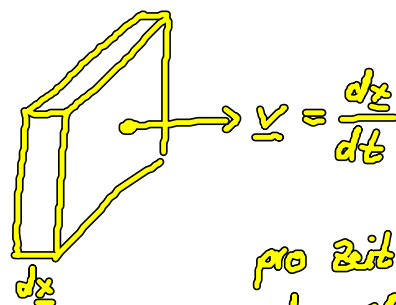
$$\underline{w}(\underline{r}, t) = \int E(\underline{k}) v_g f(\underline{r}, \underline{k}, t) z d^3k \quad \text{Energiestromdichte (Energie transport)}$$

Mit der Definition des Ensemble-Mittelwertes

$$\underline{v}(\underline{r}, t) = \langle v_g \rangle := \frac{1}{n} \int v_g f(\underline{r}, \underline{k}, t) z d^3k$$

läßt sich schreiben

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = -en \langle v_g \rangle$$



pro Zeit dt treten
 $n dx$ Elektronen mit

Ziel:

Zusammenhang zwischen \vec{j} und v. Feld \underline{E} ?

Ladung \leftarrow durch
Fläche

$$\vec{j} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} =$$
$$= en \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Im Folgenden:

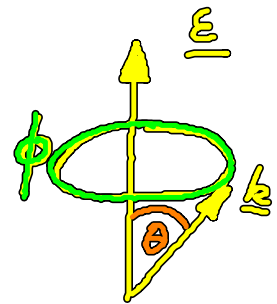
(i) $\underline{B} = 0; \underline{E} \neq 0$

(ii) Isotropes Leitungsband : $E(|k|)$

\Rightarrow Gleichgewichtsverteilung ($E=0$)

isotrop : $f_0(|k|)$

\underline{E} führt zur Störung der isotropen Verteilung



Entwicklung der richtungsabhängigen Anteile von

$f(\underline{k})$ nach Legendre - Polynomen

$$f(\underline{k}) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{f}_l(E) P_l(\cos \theta)$$

$$E = E(|k|)$$

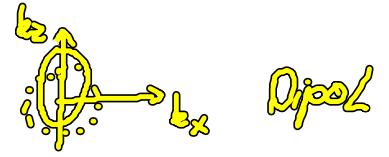
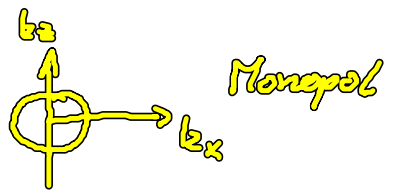
(Annahme: keine Abhängigkeit vom Azimutwinkel ϕ)

Legendre - Polynome (vollst. AUS)

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$$



Bei nicht zu hohen Feldern:

$$f_0 = \tilde{f}_0 \quad ; \quad f_1 k = \tilde{f}_1$$

$$f(k) = f_0(E) + f_1(E) \frac{k \cos \theta}{k_z}$$

stationäre, ortsunabhängige Lösung der Boltzmanngl. für linearisierte Stoßterm (elast. Streuung oder Nichtentartung)

Legendre Entwicklung ergibt:

$$-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k_z} \left(\sum_l \tilde{f}_l(E) P_l(\cos \theta) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stoß}}$$

→ unendliche Summe für $\tilde{f}_l(E)$
→ Koeff.vergleich

• Abbruch der Legendre Entwicklung

$$-\frac{eE}{\hbar} \frac{\partial}{\partial k_z} \left(f_0(E) + f_1(E) \frac{k}{k_z} \right) = -\frac{eE}{\hbar} \left\{ \underbrace{\frac{df_0}{dE} \frac{\partial E}{\partial k_z}}_{\frac{\hbar^2 k_z}{m^*}} + \left[f_1 + \underbrace{\frac{df_1}{dE} \frac{\partial E}{\partial k_z} k_z}_{\frac{\hbar^2 k_z}{m^*}} \right] \right\}$$

$$= -\frac{\hbar e E}{m^*} \frac{d\langle f_0 \rangle}{dE} \underbrace{k \cos \theta}_{P_1} - \frac{e E}{\hbar} \left[f_1 + \frac{d f_1}{dE} \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right) \right]$$

$\cos^2 \theta$
 $2P_2(\cos \theta)$

$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d(\cos \theta) d\phi$
 $= \frac{1}{3}$

verschwindet
 bei Integration
 über Kugeloberfläche

$$\kappa = e E \frac{\hbar k}{m^*} \frac{d\langle f_0 \rangle}{dE} P_1(\cos \theta) - \frac{e E}{\hbar} \frac{2}{3} E^{-1/2} \frac{d}{dE} (E^{3/2} f_1) P_0(\cos \theta)$$

Stoßterm für Elektron-Photon-Streuung:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stop}} = -\frac{V_g}{(2\pi)^3} \int \left\{ W(k, k') f_0(E_k) - W(k', k) f_0(E_{k'}) \right\} d^3k'$$

$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{stop}} \cdot P_0(\cos \theta)$

$$- \frac{V_g}{(2\pi)^3} \int \left\{ W(k, k') f_1(E_k) k \cos \theta - W(k', k) f_1(E_{k'}) k' \cos \theta \right\} d^3k'$$

$$k \cos \theta \int f_1$$



linearer Integrations.

(für nichtentartete
HL (wenig Ladungsträger))

Koeffizientenvergleich der Legendre-Polynome in der Boltzmann-Gl.:

$$P_0: -\frac{eE}{\hbar} \frac{2}{3} E^{1/2} \frac{d}{dE} (E^{3/2} f_1) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{stop}} \quad (1)$$

$$P_1: -eE \frac{\hbar k}{m v} \frac{df_0}{dE} = k \mathcal{L} f_1 \quad (2)$$

- Für kleine Felder E ist die linke Seite von (1) $O(E^2)$ und kann vernachlässigt werden.
Die therm. Gleichgewichtsverteilung (Fermi-Verteilung) erfüllt

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{stop}} = 0 \quad (\text{nicht eindeutig})$$

- Für höhere Felder ist L.S. von (1) nicht vernachlässigbar
 f_0 ist keine Fermi-Verteilung sondern nur der kugelsym. Anteil der Nichtgleichgewichtsverteil., abhängig von E .

z.B. quasitherm. Verteilung mit Elektronentemp. $T_e > T_L$:
„heiße Elektronen“

Relaxationszeitnäherung der Boltzmann-Gl.:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stop}} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

τ : Relaxationszeit

f_0 : geeignete (gleichgewichtige) Verteilung (Kugelsymmetrie)

Ohne elektr. oder magn. Felder und bei räumlicher Homogenität

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{f - f_0}{\tau} \quad \rightarrow \quad f(t) = f_0 + (f(t=0) - f_0) e^{-t/\tau}$$

Frage:

Wann hat der Stoßterm die Form $-\frac{f - f_0}{\tau} = \frac{f + k \cos \theta}{\tau}$?

Näherungsannahmen:

(a) Isotropes, nichtkurvart, parabol. Band, isotrope Streuung

(b1) elast. Streuung: $W(\underline{k}', \underline{k}) = W(\underline{k}, \underline{k}')$

$$f_+(E_k) = f_+(E_{k'}) \quad , \quad k = k'$$

$$\mathcal{L} f_1 = \frac{1}{k \cos \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stop}} = - f_+(E_k) \underbrace{\frac{V_k}{(2\pi)^3} \int d^3 k' W(k, k') \left(1 - \frac{v_k \cos \theta}{v_{k'}}\right)}_{1/\tau}$$

elast. Phononen und Störstellenstreuung

(b₂) erinnerungslöschung: stöße (W(k',k) hängt nicht von der Richtung von k' ab)

$$\Rightarrow \int W(k',k) f_1(E_{k'}) k' \cos \theta d^3 k' = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} f_1 = - f_1(E_k) \underbrace{\frac{V_k}{(2\pi)^3} \int W(k,k') d^3 k'}_{1/\tau}$$

(nichtpolare opt. Phononen)

NB: Eine Relaxationszeit existiert i.a. nicht für polare opt. Phononen Streuung (außer für $E_k \gg \hbar\omega$) und e-e Streuung

Energieabhängigkeit der Relaxationszeit τ :

Bei gegebenen Matrixelementen können Stoßintegrale ausgewertet werden:

Akust. Phononen: $\frac{1}{\tau} \sim E^{1/2}$

geladene Störstellen: $\frac{1}{\tau} \sim E^{-3/2}$

nichtpolare opt. Phononen: $\frac{1}{\tau} \sim (N_b + 1) \sqrt{E - \hbar\omega} + N_b \sqrt{E + \hbar\omega}$

polare opt. Phononen für $E_k \gg \hbar\omega$: $\frac{1}{\tau} \sim E^{-1/2}$

In Relaxationszeitnäherung erhält man $f_1(E)$ aus (2)

$$-e E \frac{\tau}{m^*} \frac{df_0}{dE} = - \frac{f_1(E)}{\tau(E)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1(E) = \frac{e \tau}{m^*} \tau(E) \frac{df_0}{dE} E}$$

Einsetzen in (1) liefert Dgl. für $f_0(E)$

$$-\frac{e^2 E^2}{m^*} \frac{2}{3} E^{-1/2} \frac{d}{dE} \left(E^{3/2} \tau(E) \frac{df_0}{dE} \right) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}}$$



$\sigma(E^2)$

Lösung für kleine E :
(l.s. Parabelnäherung)

$$f_0(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \approx e^{-\frac{E-E_F}{kT}} \quad \text{für } E \ll E_F$$

(unabhängig von E)

Bestimmung des Fermi Niveaus E_F aus Normierung:

$$n = \int f_0 z d^3k = \int_0^\infty f_0(E) D(E) dE = e^{\frac{E_F}{kT}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-E/kT} D(E) dE}_{N_c}$$

$$f_0(E) = \frac{n}{N_c(T)} e^{-E/kT}$$

„eff. Zustandsdichte“

Elektrische Stromdichte

(isotrop. parabh. Band)

$$\underline{j} = -e \int \underline{v}_g(k) f(k) z d^3k$$

$$= \underbrace{-\frac{e}{m^*} \int \hbar k f_0(k) z d^3k}_0 - \underbrace{\frac{e}{m^*} \int \hbar k k \cos \Theta f_1(E) z d^3k}_{x,y\text{-Komp. verschwindet}}$$

wegen Kugelsymmetrie
von $f_0(k) = f_0(-k)$

$$j_z = -\frac{e}{m^*} \int_0^\infty \hbar k^2 f_1(E) z k^2 dk \int_{-1}^1 \cos^2 \Theta d(\cos \Theta) \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= -\frac{e (2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^4} \int E^{3/2} f_1(E) dE$$

Relaxationszeitnäherung für f_1

$$= \underbrace{+\frac{e^2}{m^*} \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^4} \int E^{3/2} z \frac{df_0}{dE} dE \cdot E}_{\sigma \text{ Leitfähigkeit}}$$