

elektrische Leitfähigkeit:

$$\underline{j} = \sigma \cdot \underline{E}$$

σ Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2}{m^*} \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int E^{3/2} \tau(E) \left(-\frac{df_0}{dE} \right) dE$$

Für kleine Felder:

$$f_0(E) = \frac{n}{N_c} e^{-E/kT}$$

(Gleichgewichtsvert., nicht gestört)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = e \cdot n \mu}$$

unabhängig vom Feld!
Temperaturabhängigkeit durch f_0, τ

mit $\mu := \frac{e}{m^*} \langle \tau \rangle$ Beweglichkeit

$$\langle \tau \rangle \sim \int E^{3/2} \tau(E) e^{-E/kT} dE \quad \text{gemittelte Stauzeit}$$

\Rightarrow linearer Transport: $\underline{j} = \sigma \underline{E} \sim \underline{E}$ (Ohmsches Gesetz)

Analogie zum Drude-Modell der Leitfähigkeit eines klass. freien Elektronengases (1900)

Stoßwahrscheinlichkeit $\tau^{-1} \equiv \langle \tau \rangle^{-1}$

mittlere Geschwindigkeit $\underline{v} = -\frac{e}{m^*} \tau \underline{E} \equiv -\mu \underline{E}$

Stromdichte $\underline{j} = -en\underline{v} = en\mu \underline{E} \equiv \sigma \underline{E}$

Für große Felder E :

j_0 hängt von E ab

$$\Rightarrow \sigma(E) = en\mu(E) \quad \text{feldabhängig!}$$

Nichtlinearer Transport

z.B. für akust. Phononen

$$\mu(E) \quad \text{mit} \quad \frac{d\mu}{dE} < 0 \quad (\text{negative diff. Mobilität})$$

oder: nichtpolare opt. Phononen für $E > \hbar\omega$

$$j_0 = env_s \frac{E}{\hbar(a + b^2)}$$

$$\xrightarrow{E \rightarrow \infty} env_s = \text{const}$$

Driftgeschwindigkeitsättigung

Bemerkungen:

(i) Matthiessen'sche Regel

Für verschiedene Streumechanismen addieren sich die spezifischen Widerstände $1/\sigma$

Vor.: Relaxationszeitnäherung

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{stop}} \approx \sum_i \frac{1}{\tau_i} \approx \sum_i \frac{1}{\tau_{0i}}$$

(ii) $\sigma = en(T)\mu(T)$

↑
Statistik
des
Bändermodells

→ über Stoßprozesse T abhängig

- Temp. unabh. für Metalle
- $\sim e^{-E/kT}$ f. Halbleiter \rightarrow stark temperaturabhängig

(iii) Monte-Carlo Simulation zur Lösung der Boltzmann Gleichung

6.4. Allgemeine Transportgleichungen

In 6.3: El. Feld $\underline{E} = -\nabla\phi$

$$\Downarrow \quad \text{Transportkoeffizient } \sigma$$

$$\text{el. Stromdichte } \underline{j} = \sigma \underline{E}$$

Verallgemeinerung: verallgemeinerte thermodyn. Kräfte $\neq 1$

$$\Downarrow \quad (\nabla\phi, \nabla\mu, \nabla T \dots)$$

\uparrow
Gittertemperatur

verallgemeinerte Flüsse (irreversible Transportströme) \underline{j}_α

Ziel: Ableitung von Transportgleichungen aus der Boltzmann gl.

Annahme: Relaxationszeitnäherung für kleine E
(isotropes, parabol. Band, isotrope elast. Streuung)

$$\text{zu } \underline{j} = -e \int v_g f z d^3k \quad (\text{el. Stromdichte})$$

$$\text{und } \underline{\omega} = \int E(k) v_g f z d^3k \quad (\text{Energiestromdichte})$$

tragen nur die nicht-Isogal-symm. Anteile bei $\delta f := f(\underline{k}) - f_0(|k|)$

Stationäre Boltzmann-Gl. in Relaxationszeitnäherung:

$$\underline{v}_g \nabla_r f - \frac{e}{\hbar} (\underline{E} + \underline{v}_g \times \underline{B}) \nabla_k f = \frac{\delta f}{\tau(E)}$$

Mit $\underline{\nabla}_r f \stackrel{\textcircled{*}}{\approx} \underline{\nabla}_r f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \left(\frac{E - E_F}{kT} \right)} \underline{\nabla}_r \left(\frac{E - E_F}{kT} \right)$

$$= \frac{\partial f_0}{\partial E} \left(-\underline{\nabla}_r E_F - \frac{E - E_F}{T} \nabla T \right)$$

und $\nabla_k f = \nabla_k f_0 + \nabla_k \delta f = \nabla_k E \frac{\partial f_0}{\partial E} + \nabla_k \delta f$

$$\underline{E} \cdot \nabla_k f \stackrel{\textcircled{*}}{\approx} \underline{E} \cdot \underline{v}_g \lambda \frac{\partial f_0}{\partial E}$$

$$(\underline{v}_g \times \underline{B}) \cdot \nabla_k f = (\underline{v}_g \times \underline{B}) \cdot \nabla_k \delta f$$

(Für $\underline{B} = \underline{\nabla}_r E_F = \nabla T = 0$ stimmt dies mit $f_1 = \frac{e\hbar}{m^*} \approx \frac{df_0}{dE} \underline{\varepsilon}$ überein (siehe 6.3.))

⊛ analog zur ersten Ordnung
des Koeffizientenvergleiches
für reines E-Feld

DGL für δf

$$\Rightarrow \delta f = \tau \left\{ \left[v_g (\nabla_r E_F + \frac{E - E_F}{T} \nabla T) + e v_g \underline{E} \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} + \frac{e}{\tau} (v_g \times B) \nabla_k \delta f \right\}$$

① DGL ist lösbar mit Ansatz: $\delta f = \tau v_g A \frac{\partial f_0}{\partial E}$
↑
zu bestimmen

② Lösung einsetzen in $\underline{j} = -\frac{e}{m^*} \int \tau \underline{k} \delta f \, z d^3k$
 und $\underline{w}_g = \underline{w} - E_F \delta \left(-\frac{1}{e} \right)$
↑ ↗ konvektive Energiedichte
↑ ↖ gesamte Energiedichte
 $= \frac{1}{m^*} \int \tau \underline{k} (E - E_F) \delta f \, z d^3k$

liefert Transportgleichungen

$$\underline{j} = \underbrace{M_{00} \underline{E}}_{\text{elektr. Leitf.}} + \underbrace{M_{10} \underline{B} \times \underline{E} + M_{20} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E})}_{\text{transversal Halleffekt longitudinal.}} + \underbrace{M_{01} \frac{\nabla T}{T}}_{\text{Seebeck-Effekt}} + \underbrace{M_{11} \underline{B} \times \frac{\nabla T}{T}}_{\text{Nernst-Effekt}} + M_{21} \underline{B} (\underline{B} \cdot \frac{\nabla T}{T})$$

$$-W_q = \underbrace{M_{01} \underline{E}}_{\text{Peltier Effekt}} + \underbrace{M_{11} \underline{B} \times \underline{E} + M_{21} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E})}_{\text{Ettingshausen Effekt}} + \underbrace{M_{02} \frac{\nabla T}{T} + M_{12} \underline{B} \times \frac{\nabla T}{T} + M_{22} \underline{B} (\underline{B} \cdot \frac{\nabla T}{T})}_{\text{Fouriergesetz}}$$

mit Transportkoeffizienten

$$M_{ik} = -\frac{e}{3\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{E^{3/2}}{1 + (\mu B)^2} \frac{\partial f_0}{\partial E} \left(\frac{e\tau}{m^*} \right)^{i+1} \left(\frac{E - E_F}{e} \right)^k dE$$

• Diese Transportgl. enthalten neben der el. Leitfähigkeit und dem Fouriergesetz der Wärmeleitung

- thermoelectr. Effekte (Peltier, Seebeck)
- galvanometr. Effekte (Hall)
- thermomagn. Effekte (Nernst...)

• In homogenen isotropen Festkörper übt Magnetfeld mit $\underline{B} \parallel \underline{E}, \nabla T$ keine primäre Wirkung auf die Ladungsträger
 → nur transversale Effekte ($\underline{B} \perp \underline{E}, \nabla T$)

6.5. Magnetowiderstand und Hall-Effekt

$$\nabla T = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{j} = M_{00} \underline{E} + M_{10} \underline{B} \times \underline{E} + M_{20} \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{E})$$

Näherung: τ energieunabhängig $\rightarrow \mu = \frac{e}{m^* \tau}$

$$\Rightarrow M_{i0} = \frac{e \mu^{i+1}}{1 + (\mu B)^2} \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty E^{3/2} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE$$

↓ part. Integration

$$= \frac{3}{2} \int_0^\infty E^{1/2} f_0 dE$$

$$= \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \mu^i \quad \text{mit } \sigma = en\mu$$

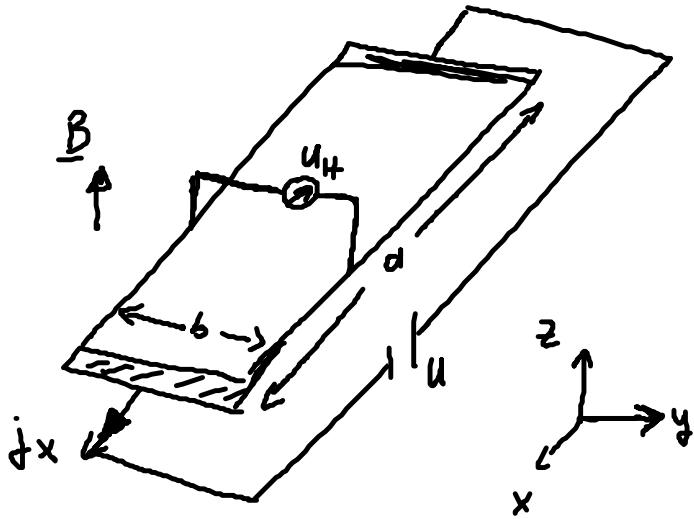
$n = \int_0^\infty f_0 D(E) dE$

$$\Rightarrow \underline{j} = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \left[\underline{\varepsilon} + \mu \underline{B} \times \underline{\varepsilon} + \mu^2 \underline{B} (\underline{B} \cdot \underline{\varepsilon}) \right]$$

↑
(schreibbare) Widerstandsänderung

$\underline{\varepsilon} \perp \underline{B}$ (Hall-Konfiguration), $\underline{B} = (0, 0, B)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} & \frac{-\mu B}{1 + (\mu B)^2} \sigma \\ \frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} \sigma & \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}$$



angelegte Spannung: $U = E_x d$

Randbed. : $j_y = 0$

$$\Rightarrow (\mu B E_x + E_y) \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} = 0$$

\Rightarrow induzierte Hall Spannung

$$U_H = E_y b = -\mu B E_x b$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} (E_x - \mu B E_y) = \frac{\sigma}{1 + (\mu B)^2} (1 + (\mu B)^2) E_x$$

$$= \sigma E_x \quad \text{keine Widerstandsänderung durch Magnetfeld!}$$

(Grund: Näherung für M_0)

\rightarrow gut für Metalle oder $\tau = \text{const}$

\rightarrow schlecht für Halbleiter mit $\tau(E)$

da nur für Elektronen mit der mittleren Geschwindigkeit Lorentzkraft und Gegenkraft des Hall Feldes sich kompensieren, nicht aber für die anderen Elektronen der Verteilung!

Wichtige Anwendung

Bestimmung von μ und η in Halbleitern
durch Messung von \underline{u}_H , \underline{j}_x , \underline{E}_x , \underline{B}

Erweiterungen

- (i) Ambipolare Leitung in Halbleitern (El. + Löcher)
- (ii) Quanten-Hall-Effekt
- (iii) Inhomogene Verteilung von n , E_y