# 2.5.2 Lösung der paraxialen Wellengleichung

transversale Koordinate

paraxiale Wellengleichg. $\left(\partial_\xi + \frac{1}{2ik_z}\Delta_\parallel\right)\tilde{E}(\xi, \tau, \vec{r}_\parallel) = 0$

Ausbreitungsrichtg.

Zeit

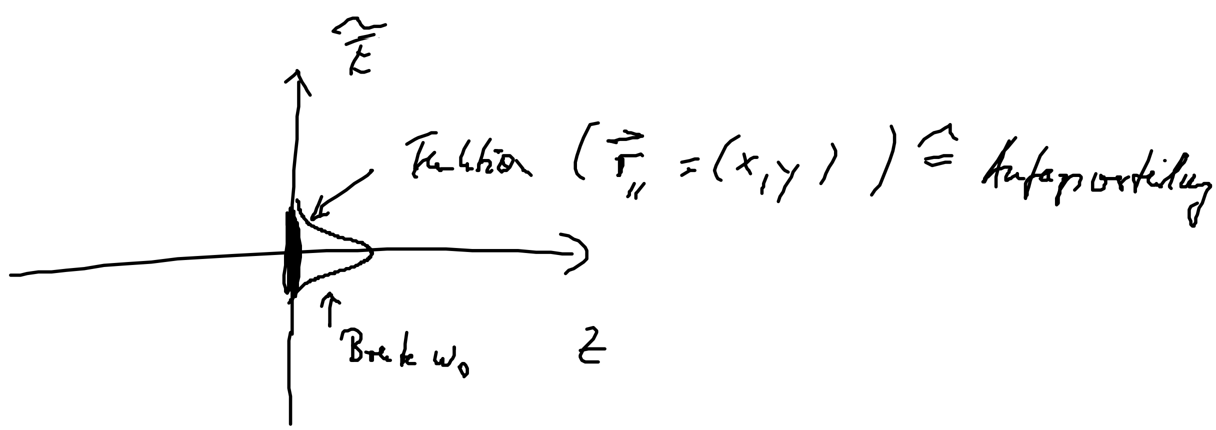
Gesamtfeld: $E = \tilde{E}(\xi, \tau, \vec{r}_\parallel)\, e^{i(k_z z - \omega_L t)}$

$\hat{=}$ Bewegung von links nach rechts

↯ nur Vorwärtsrichtg. in Theorie

lineare partielle Dgl., man sollte FT anwenden:

dazu Anfangsverteilg. am Ort $z = \xi = 0$:



Anfangsverteilg. / Randbeding. bei $z=0$

$$\tilde{E}(\vec{r}_\parallel, z=0=\xi) = E_0 \, e^{-r_\parallel^2/w_0^2} \qquad r_\parallel^2 = x^2+y^2$$

$E_0$ ↗ Zahl

Lösung im Fourierraum bzgl. $\vec{r}_\parallel \to \vec{q}_\parallel$

$$\left(\partial_\xi + \frac{1}{2ik_z}\Delta_\parallel\right)\tilde{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\partial_\xi - \frac{1}{2ik_z}\underline{\underline{q_\parallel^2}}\right)\tilde{E} = 0$$

Lösung ist: $\tilde{E}(\xi, q_\parallel) = \tilde{E}(\xi=0, q_\parallel)\, e^{-\frac{i}{2k_L} q_\parallel^2 \xi}$

man muß dann in Realraum rücktransformieren

$$\tilde{E}(\xi, \vec{r}_\parallel) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2q_\parallel \, e^{i\vec{q}_\parallel\cdot\vec{r}_\parallel}\, \tilde{E}(\xi=0, q_\parallel)\, e^{-\frac{i}{2k_L} q_\parallel^2 \xi}$$

$2\pi$-Faktor bei Rücktrafo

zurückgeführt auf $\tilde{E}(\xi=0, q_\parallel)$

mit Hilfsformel f. Gauß integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2+ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a}$$

Ergebnis der Rechnung:

$$\tilde{E}(\xi=0, q_\parallel) = E_0\, \pi\, w_0^2\, e^{-q_\parallel^2 w_0^2/4}$$

$$\tilde{E}(\xi, \eta, \vec{r}_\parallel) = E_0(\eta)\, \frac{\exp\left(-\frac{r_\parallel^2}{w_0^2(1+2i\xi/(k_z w_0^2))}\right)}{(1+2i\xi/(k_z w_0^2))}$$

Zeitabhängigkeit kann hier miteingebracht werden

Funktion v. $t - \frac{z}{c} = \eta$

geometrischer Strahlenverlauf

Dieser Lichtstrahl wird Gaußstrahl genannt

## 2.5.3. Bemerkg. zum Gaußstrahl

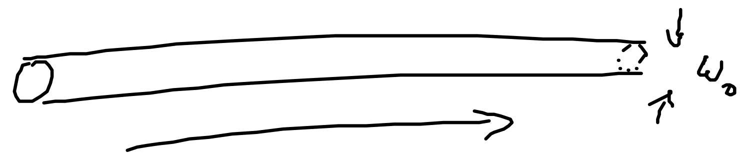
a) - Gaußstrahl durch 2 Parameter gegeben: $w_0$, $z_0 = \frac{k_z w_0^2}{2}$

(Breite bei $z=0$ ($w_0$), Frequenz und Breite ($z_0$))

- meist gewählte Ansatz um Strahl zu beschreiben

- existiert auch in Wellenleitern, Resonatoren

- einfachster Lichtstrahl $\tilde{E} = E_0 \, e^{-r_\perp^2/w_0^2} \quad \forall z$



$z < \xi$

Bedingung dafür ist

$$\xi / k_z w_0^2 \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\xi}{w_0} \ll \frac{2\pi}{\lambda} w_0$$

$$\underbrace{\frac{\text{Länge}}{\text{Breite}}}_{} = 100 \ll 10.000 \quad , \quad \lambda \approx 600\,\text{nm}$$

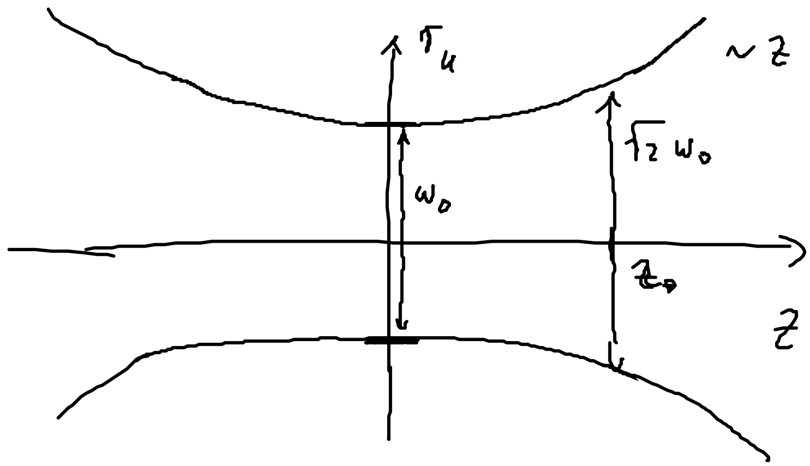
$$\frac{w_0 \, 2\pi}{\lambda} \approx \frac{w_0}{100\,\text{nm}} \overset{!}{=} 10^4$$

$$w_0 = 10^{-3}\,\text{m} = \text{mm}$$

## b) Intensität

$$|\tilde{E}|^2 = |E_0|^2 \frac{e^{-\frac{r_\perp^2}{w_0^2}\cdot\frac{2}{1+(\xi/z_0)^2}}}{1+(\xi/z_0)^2}$$

$$z_0 = \frac{k_L w_0^2}{2} \quad \text{Rayleigh Länge}$$

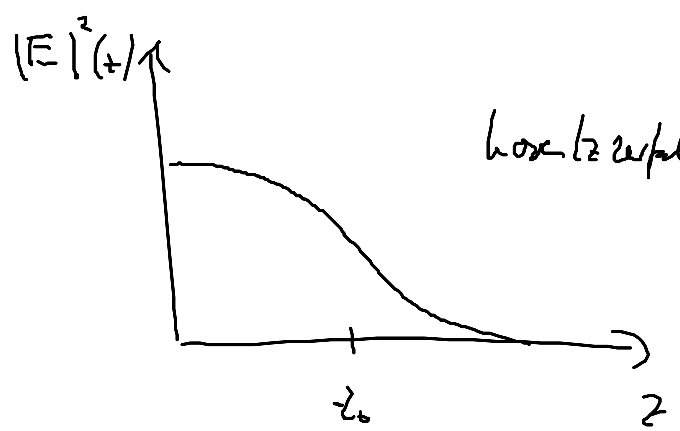



$z = \xi$

Die Variation kann durch $z_0$ im Vergleich mit Länge $z$ abgeschätzt werden (durch die Einschnürung d. Strahls auf $w_0$ entstehen Ausbreitungskomponenten in $\vec{r}_\perp$-Richtg.)

Strahlbreite $w_0\left(1+\left(\frac{\xi}{z_0}\right)^2\right)^{1/2}$

## Intensität auf z-Achse




Lorentzzerfall $r_\perp = 0$

## c) Wellenfront

Phase ansehen des Pulses:

$$E = \underbrace{E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(r_\perp / w(z)\right)^2}}_{\text{Amplitude}} \underbrace{e^{i k_z r_\perp^2 / 2R(z)} e^{-i\varphi_0(z)} e^{i(k_z z - \omega_L t)}}_{\text{Phase}}$$

$$w(z) = w_0 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^{1/2}$$ Strahlbreite

$$R(z) = z\left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)$$ Wellenradius

$$\varphi_0(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$ Phase

<u>Phase</u>:

$$\varphi = \underbrace{\frac{k_z r_\perp^2}{2R(z)}}_{\text{Lokalisierungseffekt}} - \varphi_0(z) + \underbrace{k_z z - \omega_L t}_{\text{ebene Welle}}$$

<u>Phase im Fernfeld</u> $(z \to \infty)$

$$\varphi \to k_z \left(z + \frac{r_\perp^2}{2z}\right) + \text{Konstante} - \omega_L t$$

1. Taylor der Wurzelfkt.

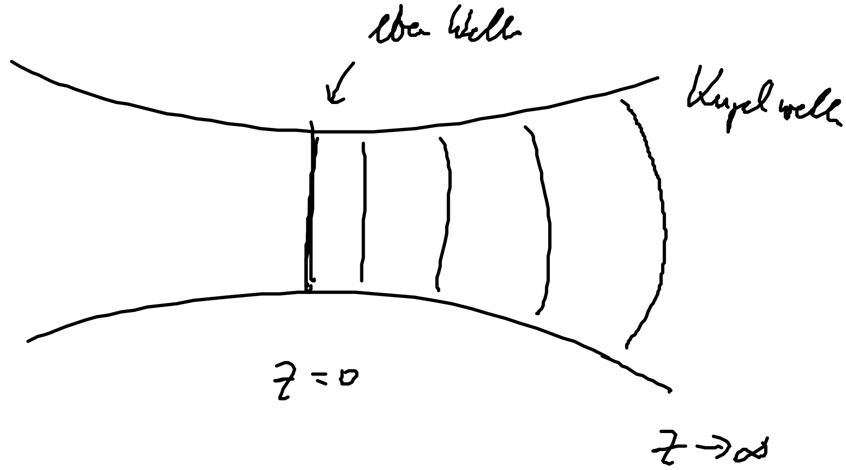
$$\approx k_z \left( \sqrt{z^2 + r_{\parallel}^2} \right) - \omega_L t$$

$$= k_z r - \omega_L t \quad \rightarrow \quad \text{Kugelwelle im Fernfeld}$$

## Phase im Nahfeld $z \to 0$

$$R(z) \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = k_z z - \omega_L t$$

in der Ebene $z = 0$ liegt eine ebene Welle vor

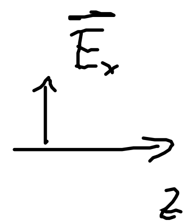



## d) Gaußstrahl ist keine exakte Lösg.

bisher: Welle in x oder y Richtg. polarisiert

und in z Richtg. Ausbreitg.

<u>aber</u> $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$




$$\partial_x E_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_x E_x = -\frac{2x}{w(\xi)^2} E_x \neq 0 \rightarrow$$ stimmt also nicht, daß $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Gaußstrahl

kompensiere diesen Fehler durch z-Komponente:

$$\partial_z E_z + \partial_x E_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_z E_z = -\partial_x E_x = \frac{2x}{w^2(\xi)} E_x$$

Ansatz: $e^{ik_z z}$

$$\boxed{E_z = \frac{2x}{ik_z w^2(\xi)} E_x}$$

Strahl enthält i.a. Beiträge die in Ausbreitungsrichtg. polarisiert sind.

e) höhere Gaußmoden können folgendermaßen bestimmt werden:

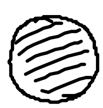
$\tilde{E}$ war die Lsg. einer homogenen Dgl.

$$\rightarrow \text{auch} \quad E^{nm} = \partial_x^n \, \partial_y^m \, \tilde{E} \; w_0^{n+m}$$

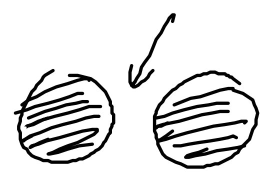
Gaußstrahl    Normierg.

sind Lösungen die durch bestimmte transversale RB realisiert werden

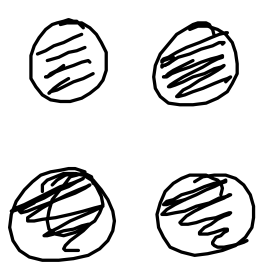
$E^{00}$



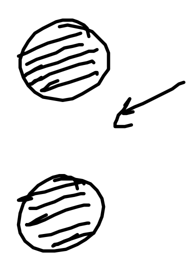
$E^{10}$    Knoten in x-Richtg.



$E^{11}$



$E^{01}$    Knoten in y-Richtg.



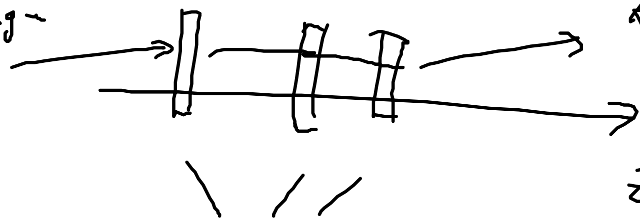
In Abhängigkeit vom Resonator erhält man diese

Moden (Hermite-Gauß-Funktionen)

## 3. Einfachste optische Elemente in der Paraxialoptik

optisches System

Eingang



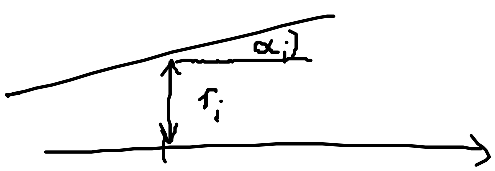
Ausgang

z

optische Elemente

optische Abbildung beschreiben

Zylindersymmetrisches System



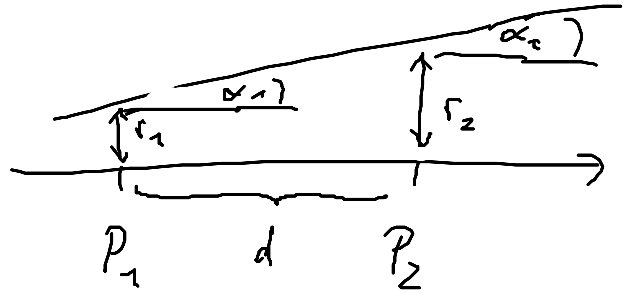

$P_i$ z

Lichtstrahl durch Pkt $i$ ist mit 2 Größen beschrieben

$\vec{s}_i = (r_i, \alpha_i)$

jedes optische Element ändert Abstand $r$ und Winkel $\alpha$

### a) Ausbreitg. in freiem Raum




achsennahe Ausbreitg. $\tan\alpha \approx \alpha$

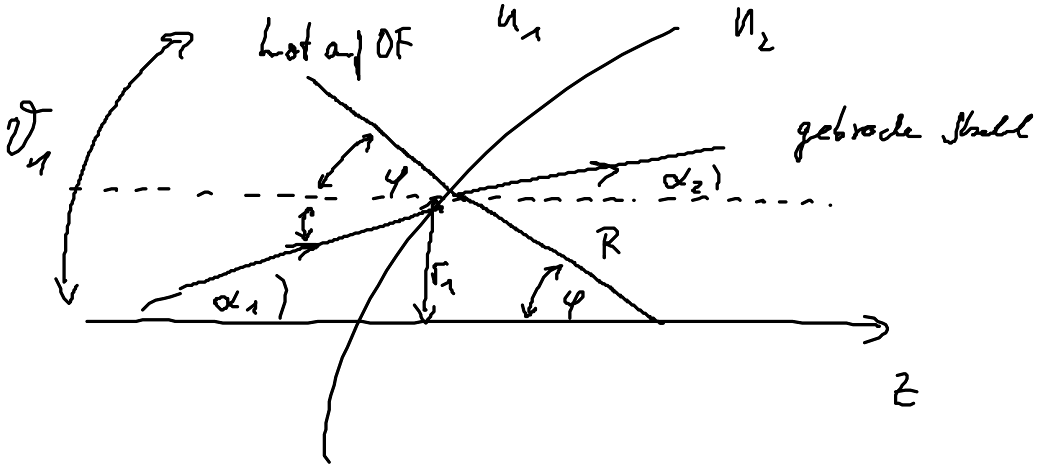
$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + \tan\alpha_1 \, d \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S}_2 = \hat{T}_{FR} \, \vec{S}_1$$

Matrix f. Ausbreitg. in freiem Raum:

$$\hat{T}_{FR} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## b) brechende Oberfläche



Brechungsindex $\quad \sin\vartheta_1 \, n_1 = \sin\vartheta_2 \, n_2 \quad$ (ED)

achsennah $\quad \vartheta_1 \, n_1 = \vartheta_2 \, n_2$

$$\vartheta_1 = \alpha_1 + \varphi = \alpha_1 + \frac{r_1}{R}$$

$$\vartheta_2 = \alpha_2 + \varphi = \alpha_2 + \frac{r_1}{R}$$

$\downarrow$

$$n_1 \left(\alpha_1 + \frac{r_1}{R}\right) = n_2 \left(\alpha_2 + \frac{r_1}{R}\right)$$

$\rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\alpha_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} r_1 \qquad$ für $\alpha_2$

$\rightarrow \quad$ für $r_1 = r_2$

<u>Matrix f. brechende Oberfläche:</u>

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{\hat{T}_B} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$R \to \infty$ $\quad n_1 \mid n_2$

für parallele Oberfläche als Grenzfall

$$\hat{T}_B \Big|_{\text{plana OF}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

## c) Linse


die Matrix für ein solches System lautet

$$\vec{S}_1 = \hat{T}_L \, \vec{S}_2$$

$$\hat{T}_L = \hat{T}_{B_2} \hat{T}_{FP} \hat{T}_{B_1}$$

$$\hat{T}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2}\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

$\nearrow$

negativer Krümmungsradius

$n_1 = 1$

$n_2 = n$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{R}\left(\frac{n-1}{n}\right) & \frac{d}{n} \\ (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right. - \frac{d\,(n-1)^2}{R_1 R_2\, n} & 1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{d}{R_2} \end{pmatrix}$$

Grenzfall dünne Linse  $d \to 0$ Vgl. mit $R_1, R_2$

$$\hat{T}_{dL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-f^{-1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$f$ : Brennweite

Anmerkg.:

- ABCD - Transfermatrix optik Methode
- $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ Matrizen : Linse, Linsensystem, Wellenleiter, Fasern

$\longrightarrow$ Mgl. Strahlengänge f. komplexe Systeme

- Reflexion kann auch behandelt werden

- $\exists$ komplexes Regelwerk um kompliziert System zu beschreiben.