5.2. Elektronenflüssigkeiten

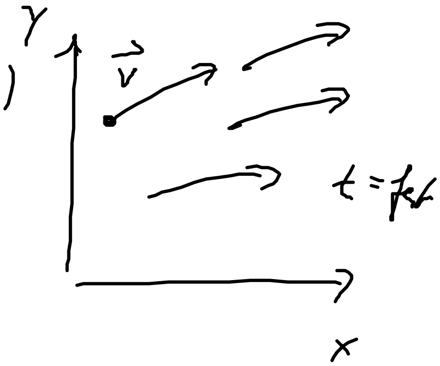
im Gegensatz zu 5.1 geht nichtlineare Antwort v. freibeweglichen Elektronen

hatte einfaches Modell gemacht, Strom der bewegl. Ladungen:

$$\vec{j} = n(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t) \Longrightarrow \text{Quelle der Maxwellgl.}$$

LT-Dichte

$\underbrace{\text{Geschwindigkeitsfeld } (\vec{r},t)}_{\text{beschreibt die Bewegg. eines Probeelektrons}}$



$n, \vec{v}$ sind Funktion von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

2 Bewegungsgleichungen: $\partial_t n = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})$ Kontinuität

$$\partial_t \vec{v} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{q}{m}\Big(\vec{E} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{B-Anteil der Lorentzkraft}}\Big)$$

Geschwindigkeitsfeldgleichung

kann gemeinsam gelöst werden;

a) lineare Antwort

$$\partial_t \vec{v} = -\gamma \vec{v} + \frac{q}{m}\vec{E} \longrightarrow \text{Drude modell (siehe früher)}$$

$\nearrow$ phänomenologische Dämpfg.

b) nichtlineare Antwort

$\underline{f}(\vec{r}, t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(-\infty) + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m}\left(\vec{E}(t') + \vec{v}(t') \times \vec{B}(t')\right) - \vec{v}(t') \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v}(t') \right\}$$

$\vec{v}(-\infty) \overset{!}{=} 0$

$\nearrow$ AB vor Lichtpuls

<u>in 0-te Ordng.:</u> $\vec{v} = \vec{v}(-\infty) = 0 \,, \quad v^{(0)} = 0$

<u>in 1.-te Ordng.:</u> $\vec{v}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \frac{q}{m} \vec{E}(t')$ (ist die lineare Antwort)

$$\dot{\vec{v}}^{(1)}(t) = -\gamma \vec{v}^{(1)}(t) + \frac{q}{m}\vec{E}(t)$$

<u>in 2.-te Ordng.:</u> $\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)} + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m} \vec{v}^{(1)}(t') \times \vec{B}(t') - \vec{v}^{(1)}(t') \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v}^{(1)}(t') \right\}$

$$\dot{\vec{v}}^{(2)} = -\gamma \vec{v}^{(2)} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{E}} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{v}^{(1)} \times \vec{B} - \underline{\underline{\vec{v}^{(1)}}} \cdot \vec{\nabla}\, \underline{\underline{\vec{v}^{(1)}}}}$$

Drudemodell $\vec{v}^{(2)}\big|_{nl}$

quadratisch in $\underline{\underline{\vec{v}}}$, daher erhält man eine Fülle von Effekten wie 2. Harmonische, optische Gleichrichtung

optische Feld: $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\,\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)\,e^{-i\omega_L t} + c.c.$

analoger Ansatz f. $\vec{B}$-Feld $(\tilde{\vec{B}})$

über Maxwellgl. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, $\vec{B}\to\vec{E}\to v_1$

rückführen

$$\underline{\underline{\left(\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}}\right)}}e^{-i\omega_L t} + \left(\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}}^{*}\right)e^{+i\omega_L t} =$$

$$\underline{\underline{i\omega_L\,\tilde{\vec{B}}}}\;e^{-i\omega_L t} \qquad -i\omega_L\,\tilde{\vec{B}}^{*}\,e^{+i\omega_L t}$$

$$\partial_t \tilde{\vec{B}} \ll \omega_L \tilde{\vec{B}}$$

Frequenzen trennen (RWA):

$$\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}} = +i\omega_L\,\tilde{\vec{B}}$$

nichtlinearen Teil $\dot{\vec{v}}^{(2)}\big|_{nl}$

$$\dot{\vec{v}}^{(2)}\big|_{nl} = \frac{q}{m}\,\vec{v}^{(1)}\times\vec{B} - \vec{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}^{(1)}$$

Ansatz: $\vec{v}^{(2)}\big|_{ne} = \frac{1}{2}\sum_{n=0} e^{-i\omega_L n t}\,\tilde{v}_n^{(2)}(t)$ einsetzen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{v}}^{(1)} &= \frac{q}{m}\vec{E}(t) \\ \vec{v}^{(1)} &= \tilde{v}^{(1)} e^{-i\omega_L t} + v^{*(1)} e^{+i\omega_L t} \end{aligned}\right\} \quad \tilde{v}^{(1)} = \frac{iq}{m\omega_L}\tilde{E} \quad \text{(RWA)}$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big|_{ne} = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\left(\tilde{v}^{(1)} \times \tilde{B}^* + \tilde{v}^{(1)*} \times \tilde{B}\right) - \tilde{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{*(1)} - \tilde{v}^{*(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{(1)}\right)$$

↗ keine Oszillation ansehen (optische Gleichrichtung)

mit $i\omega_L\tilde{B} = \vec{\nabla}\times\tilde{E}$

und $\tilde{E} = \frac{m\omega_L \tilde{v}^{(1)}}{iq}$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)} = \frac{1}{2}\left(-\tilde{v}^{(1)}\times\vec{\nabla}\times\tilde{v}^{*(1)} - \tilde{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,v^{*(1)} + \text{c.c.}\right)$$

mittels: $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$

$$\vec{a} = \tilde{v}^{(1)}, \quad \vec{b} = \tilde{v}^{*(1)}$$

$$m \left.\dot{\tilde{\vec{v}}}_0^{(2)}\right|_{ue} = -\frac{m}{2}\vec{\nabla}\left(\tilde{v}^{(1)}\cdot\tilde{v}^{*(1)}\right) = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(\frac{q^2}{2m\omega_L^2}\left|\hat{E}(\vec{r},t)\right|^2\right)}_{-\nabla\phi_p = \vec{F}_p}$$

Bemerkungen:

a) offensichtlich gibt es neben der Geschwindigkeitskomponente

$\dot{v}^{(1)} \sim E(t)$ auf einer sehr schnellen Skala

($v^{(1)} \sim \int_{-\infty}^{t} dt' \cos(\omega_L t)\hat{E} \to 0$ im Exp

mittelt sich weg.)

noch eine weitere Kraft: „ponderomotive" Kraft F_p

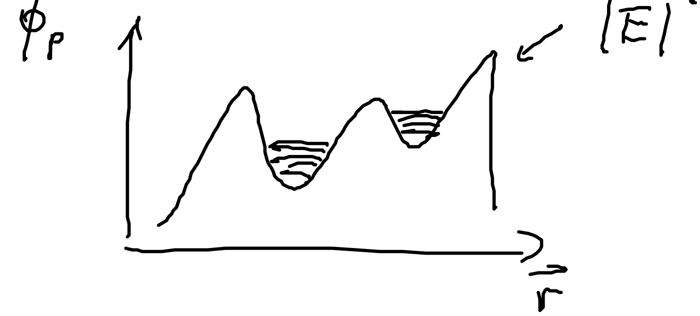
die proportional zu $-\vec{\nabla}|\hat{E}(\vec{r},t)|^2$ ist und

die aus der Intensität $|\hat{E}|^2$ folgt.

man nennt ϕ_p ponderomotives Potential

b) die Bewegg. von $\vec{v}$ kann mit den Mitteln der

Mechanik diskutiert werden:



die Elektron sammeln sich bei einer stationären Lösung in den Potentialminima an.

c) Möglichkeit Fallen f. geladene Teilchen zu realisieren

(bei Dipolen i.a. ein entgegengesetztes Vorzeichen)

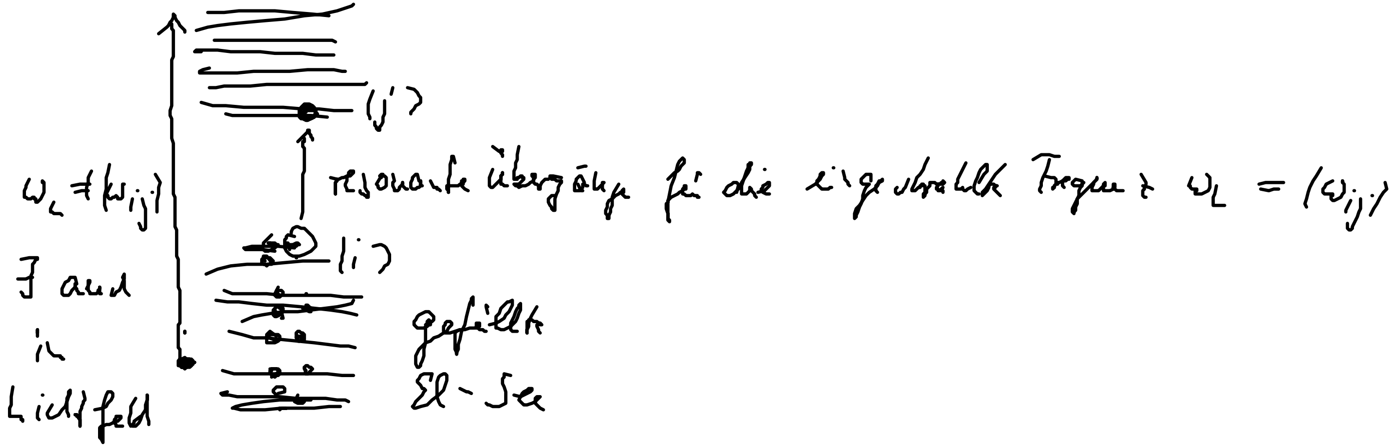
III Lichtausbreitung in Materie

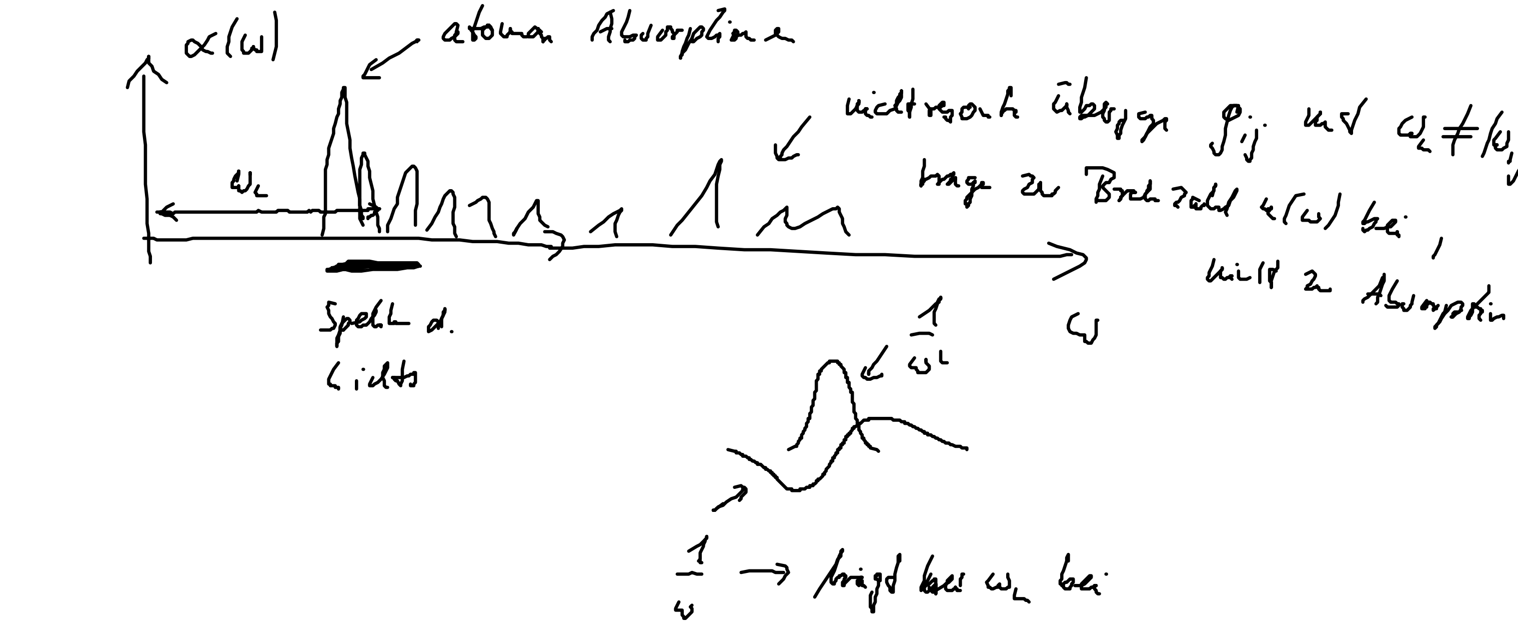
1) Verkürzte Wellengleichungen in ausgedehnten Medien:

Ziel: Lichtpulsdynamik und Solitongleichungen (Strukturen ohne Formänderungen)

Wellengleichung: $\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 (\vec{P}_{nr} + \vec{P}_{res})$

Dipoldichte wird in resonant und nichtresonant Teil aufgespalten:





alle nichtresonanten Übergänge P_{nr} werden über Brechzahl $n(\omega)$ beschrieben:

$$\vec{P}_{nr}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{nr}(\omega) \vec{E}(\omega)$$

1.1. Ableitung der Amplitudengleichung

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \left(\vec{P}_{nr} + \vec{P}_{res} \right)$$

Fourierraum bzgl. ω

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{nr}(\omega) - \mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega)$$

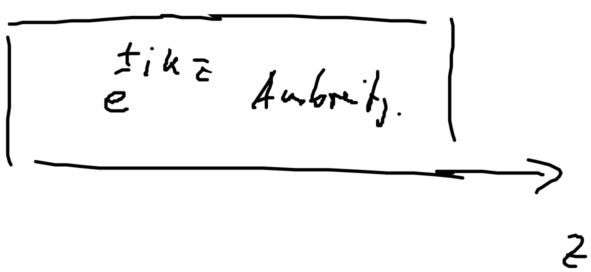
$$\vec{P}_{nr}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{nr}(\omega) \vec{E}(\omega)$$ einsetzen:

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{\left(1 + \chi_{nr}(\omega)\right)}_{n^2(\omega)\ \text{Def. der Brechzahl}} \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}$$

<u>Def</u>: $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$

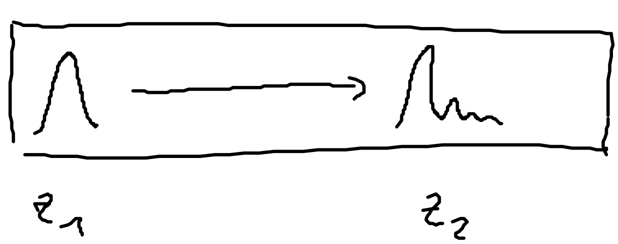
$$\Delta \vec{E}(\omega) + k^2(\omega) \vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega)$$

ausgedehntes Medium:



konzentrieren uns auf e^{ikz}, Ausbreitung nach rechts

<u>Frage</u>: Lichtausbreitungseffekte:



Ansatz für Vorwärtswelle: $\vec{E}(\vec{r},\omega) = \underbrace{\hat{E}(\vec{r}_{\parallel}, z, \omega)}_{\text{langsam in } z} e^{ik(\omega)z}$

Wurde im freien Raum bereits abgeleitet

(siehe I)

$$\Big(\Delta_{\parallel} + \underbrace{2ik(\omega)\,\partial_z}_{\gg \partial_z^2 \text{ weil } \tilde{E} \text{ lgs in } z.} + \cancel{\partial_z^2} - k^2(\omega)\Big)\tilde{E} + f^2(\omega)\tilde{E} = -\mu_0\omega^2 \tilde{P}_{res}$$

analoger Ansatz f. P

$$\left(\Delta_{\parallel} + 2ik(\omega)\,\partial_z\right)\tilde{E} + \underbrace{\left(f^2 - k^2\right)}_{?}\tilde{E} = -\mu_0\,\omega^2\,\tilde{P}_{res}$$

$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ wäre im Vakuum Null

Wählen, so daß man den Term wieder ≈ 0 bekommt:

$$\left(f^2 - k^2\right) = (f-k)\underbrace{(f+k)}_{\approx 2k} \approx (f-k)\,2k \quad , \quad f = \frac{n(\omega)\omega}{c}$$

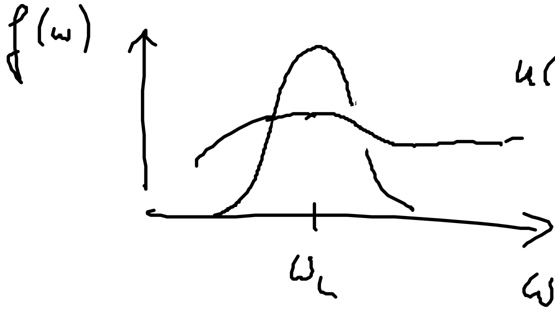
$$\approx \left\{ \underline{f(\omega_L)} + f'(\omega_L)\,\Delta\omega + \frac{1}{2} f''(\omega_L)\,\Delta\omega^2 - \underbrace{\underline{k(\omega)}}_{} \right\} 2k(\omega)$$

f an Stelle der Trägerfrequenz entwickeln

Ansatz, noch offen

wähle: $k(\omega) = f(\omega_L)$

$= \frac{n(\omega_L)\,\omega_L}{c}$



$n(\omega)$, $f(\omega)$ ändern sich schwach

$$\left(\frac{\Delta_\parallel}{2ik_L} + \partial_z - i f_L' \,\Delta\omega - \frac{i}{2} f_L'' \,\Delta\omega^2 \right) \tilde{E}(\omega) = \frac{i\mu_0\omega^2}{2k_L} \tilde{P}_{res}(\omega)$$

$$\underbrace{f_L' = f'(\omega_L), \quad f_L'' = f''(\omega_L)}_{\text{am besten aus Exp. bestimmen}}, \quad \underbrace{k(\omega) = k_L = k(\omega_L)}_{\text{festgelegt}}$$