5.2. Elektronenflüssigkeiten

im Gegensatz zu 5.1. gibt nichtlineare Antwort v. freibeweglichen Elektronen

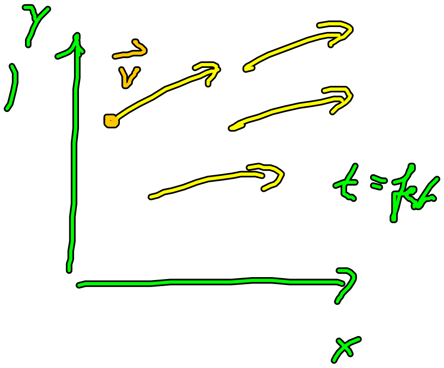
hatten einfaches Modell gemacht, Strom der bewegl. Ladungen:

$$\vec{j} = n(\vec{r},t)\cdot\vec{v}(\vec{r},t) \quad \Longrightarrow \quad \text{Quelle der Maxwellgl.}$$

LT-Dichte

$\underbrace{\text{Geschwindigkeitsfeld } (\vec{r},t)}$

beschreibt die Bewegg. eines Probeelektrons



$n, \vec{v}$ sind Funktion von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

2 Bewegungsgleichungen: $\partial_t n = -\vec{\nabla}\cdot(n\vec{v})$ Kontinuität

$$\partial_t \vec{v} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v} + \frac{q}{m}\Big(\vec{E} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{B-Anteil der Lorentzkraft}}\Big)$$

Geschwindigkeitsfeldgleichung

kann gemeinsam gelöst werden;

a) lineare Antwort

$$\partial_t \vec{v} = -\gamma \vec{v} + \frac{q}{m}\vec{E} \longrightarrow \text{Drudemodell (siehe früher)}$$

$\nearrow$ phänomenologische Dämpfg.

b) nichtlineare Antwort

$\rho(\underline{\vec{r}}, t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(-\infty) + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m}\left(\vec{E}(t') + \vec{v}(t') \times \vec{B}(t')\right) - \vec{v}(t') \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v}(t') \right\}$$

$\nearrow$ AB vor Lichtpuls; $\vec{v}(-\infty) \overset{!}{=} 0$

in 0-te Ordng.: $\vec{v} = \vec{v}(-\infty) = 0$, $v^{(0)} = 0$

in 1.-te Ordng.: $\vec{v}^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \frac{q}{m} \vec{E}(t')$ (ist die lineare Antwort)

$$\dot{\vec{v}}^{(1)}(t) = -\gamma \vec{v}^{(1)}(t) + \frac{q}{m}\vec{E}(t)$$

in 2.-te Ordng.:

$$\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)} + \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-\gamma(t-t')} \left\{ \frac{q}{m} \vec{v}^{(1)}(t') \times \vec{B}(t') - \vec{v}^{(1)}(t') \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v}^{(1)}(t') \right\}$$

$$\dot{\vec{v}}^{(2)} = -\gamma \vec{v}^{(2)} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{E}}_{} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{v}^{(1)} \times \vec{B} - \vec{v}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v}^{(1)}}_{}$$

Drudemodell $\qquad \vec{v}^{(2)}\big|_{nl}$

quadratisch in $\vec{v}$, daher erhält man eine Fülle von Effekten wie 2. Harmonische, optische Gleichrichtung

optisches Feld: $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\tilde{E}(\vec{r},t)e^{-i\omega_L t} + c.c.$

analoger Ansatz f. $\vec{B}$-Feld ($\tilde{B}$)

über Maxwellgl. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$, $\tilde{B}\to\tilde{E}\to v_1$ zurückführen

$$(\vec{\nabla}\times\tilde{E})e^{-i\omega_L t} + (\vec{\nabla}\times\tilde{E}^*)e^{+i\omega_L t} = i\omega_L\tilde{B}e^{-i\omega_L t} - i\omega_L\tilde{B}^*e^{+i\omega_L t}$$

$$\partial_t\tilde{B} \ll \omega_L\tilde{B}$$

Frequenzen kennen (RWA):

$$\vec{\nabla}\times\tilde{E} = +i\omega_L\tilde{B}$$

nichtlinearen Teil $\vec{v}^{(2)}\big|_{nl}$

$$\vec{v}^{(2)}\big|_{nl} = \frac{q}{m}\vec{v}^{(1)}\times\vec{B} - \vec{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}^{(1)}$$

Ansatz: $\vec{v}^{(2)}\Big|_{nl} = \frac{1}{2}\sum_{n=0} e^{-i\omega_L n t}\,\tilde{\vec{v}}_n^{(2)}(t)$ einsetzen

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{v}}^{(1)} &= \frac{q}{m}\vec{E}(t)\\ \vec{v}^{(1)} &= \tilde{v}^{(1)} e^{-i\omega_L t} + v^{*(1)} e^{+i\omega_L t}\end{aligned}\right\} \quad \tilde{v}^{(1)} = \frac{iq}{m\omega_L}\tilde{E} \quad \text{(RWA)}$$

$$\dot{\tilde{v}}_0^{(2)}\Big|_{nl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{q}{m}\big(\tilde{v}^{(1)}\times\tilde{B}^* + \tilde{v}^{*}\times\tilde{B}\big) - \tilde{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{*(1)} - \tilde{v}^{*(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\tilde{v}^{(1)}\Big)$$

keine Oszillation ansehen (optische Gleichrichtung)

mit $i\omega_L\tilde{B} = \vec{\nabla}\times\tilde{E}$

und $\tilde{E} = \dfrac{m\omega_L\tilde{v}^{(1)}}{iq}$

$$\dot{\tilde{V}}_0^{(2)} = \frac{1}{2}\Big(-\tilde{v}^{(1)}\times\vec{\nabla}\times\tilde{v}^{*(1)} - \tilde{v}^{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,v^{*(1)} + \text{c.c.}\Big)$$

mittels: $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a}\times(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})$

$\vec{a} = \tilde{v}^{(1)}$, $\vec{b} = \tilde{v}^{*(1)}$

$$m\,\dot{\tilde{\vec v}}_0^{(2)}\Big|_{m} = -\frac{m}{2}\vec\nabla\left(\tilde v^{(1)}\cdot\tilde v^{*(1)}\right) = -\vec\nabla\underbrace{\left(\frac{q^2}{2m\omega_L^2}\left|\hat E(\vec r,t)\right|^2\right)}_{-\nabla\phi_p = \vec F_p}$$

Bemerkungen:

a) offensichtlich gibt es neben der Geschwindigkeitskomponente

$\tilde v^{(1)} \sim E(t)$ auf einer sehr schnellen Skala

$\Big($ $v^{(1)} \sim \int_{-\infty}^{t} dt' \cos(\omega_L t')\,\hat E \longrightarrow 0$ im Exp

mittelt sich weg. $\Big)$

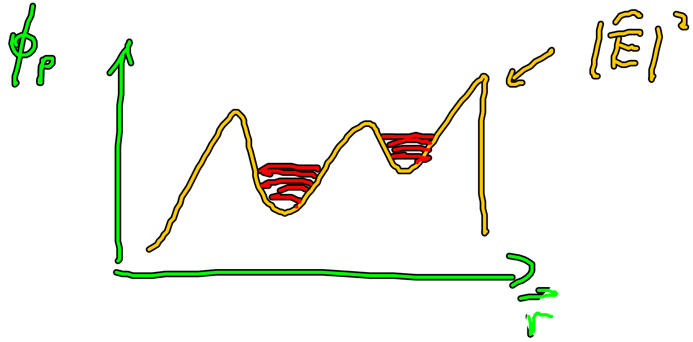
noch eine weitere Kraft: „ponderomotive" Kraft F_p

die proportional zu $-\vec\nabla\left|\hat E(\vec r,t)\right|^2$ ist und

die aus der Intensität $|\hat E|^2$ folgt.

man nennt ϕ_p ponderomotives Potential

b) die Bewegg. von $\vec v$ kann mit den Mitteln der Mechanik diskutiert werden:



die Elektronen sammeln sich bei einer stationären Lösung in den Potentialminima an.

c) Möglichkeit Fallen f. geladenen Teilchen zu realisieren
(bei Dipolen i.a. ein entgegengesetztes Vorzeichen)

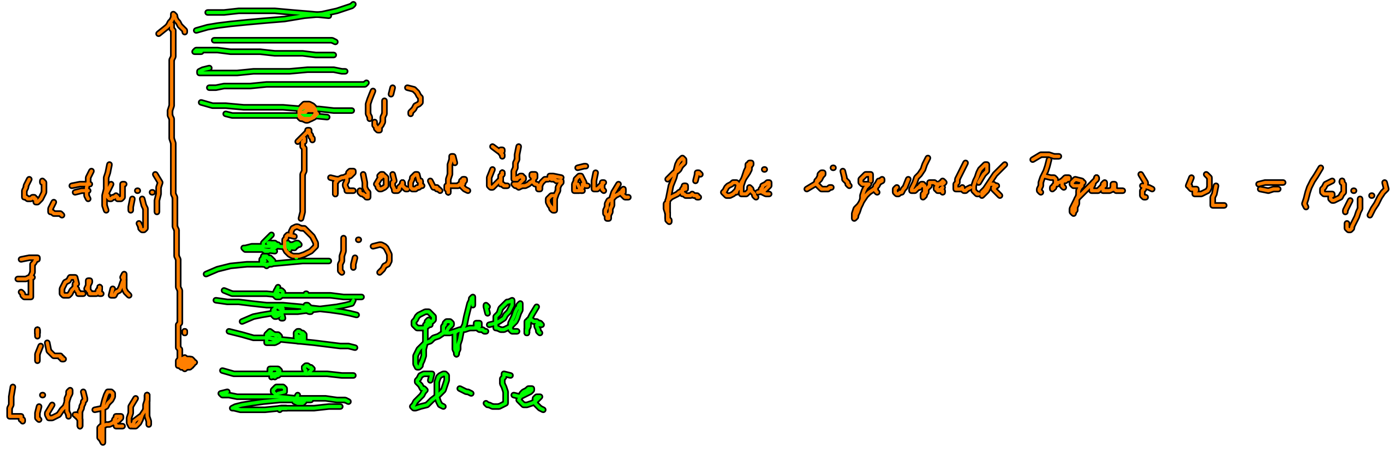
III Lichtausbreitung in Materie

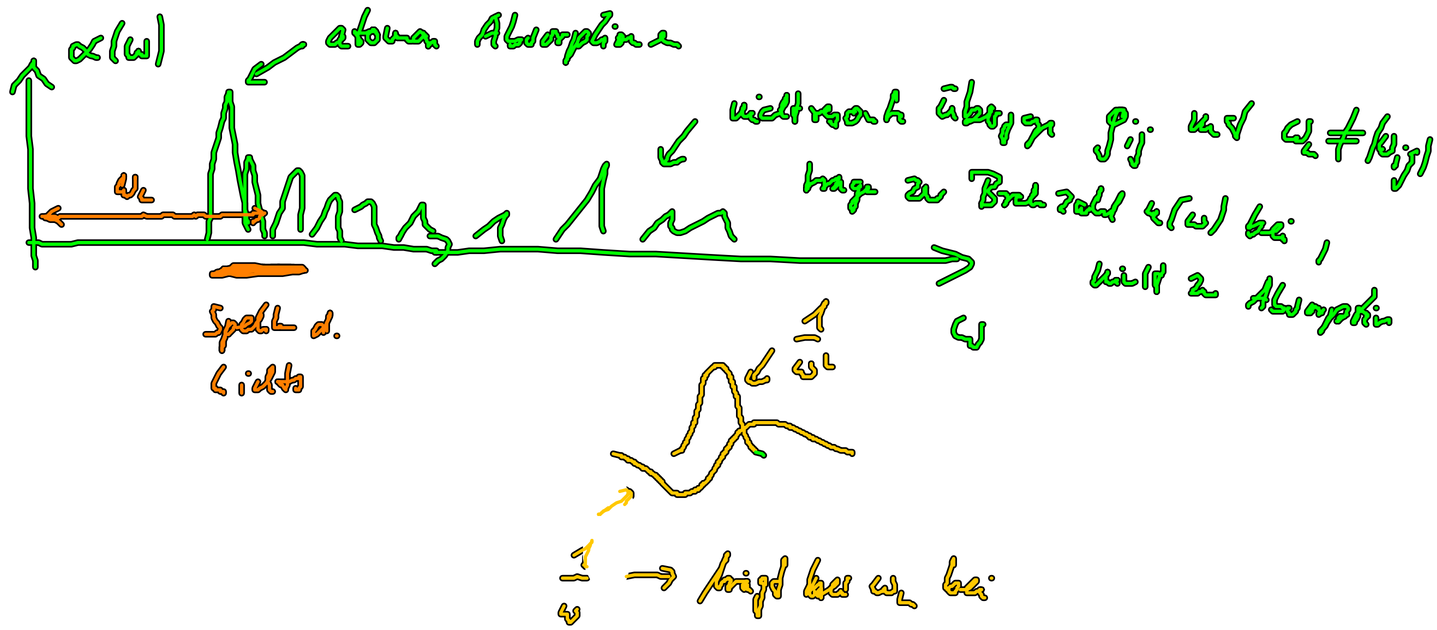
1/ Verkürzte Wellengleichungen in ausgedehnten Medien:

Ziel: Lichtpulsdynamik und Solitongleichungen (Strukturen ohne Formänderungen)

Wellengleichung: $\Box \vec{E} = -\mu_0 \partial_t^2 (\vec{P}_{nr} + \vec{P}_{rs})$

Dipoldichte wird in resonant und nichtresonant Teil aufgespalten:





alle nichtresonanten Übergänge P_{nr} werden über Brechzahl $n(\omega)$ beschrieben:

$$\vec{P}_{nr}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{nr}(\omega) \vec{E}(\omega)$$

1.1. Ableitung der Amplitudengleichung

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \left(\vec{P}_{nr} + \vec{P}_{res} \right)$$

Fourierraum bzgl. ω

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{nr}(\omega) - \mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega)$$

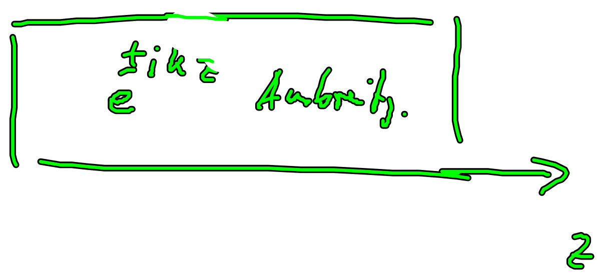
$\vec{P}_{nr}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{nr}(\omega) \vec{E}(\omega)$ einsetzen:

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\left(1+\chi_{nr}(\omega)\right)}_{n^2(\omega) \text{ Def. der Brechzahl}} \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}$$

Def: $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$

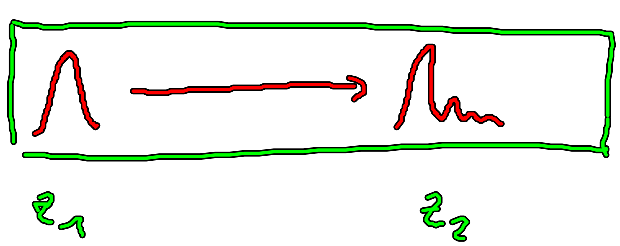
$$\Delta \vec{E}(\omega) + k^2(\omega)\vec{E}(\omega) = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_{res}(\omega)$$

ausgedehntes Medium:



konzentrieren uns auf e^{ikz}, Ausbreitung nach rechts

Frage: Lichtausbreitungseffekte:



Ansatz für Vorwärtswelle: $\vec{E}(\vec{r},\omega) = \underbrace{\hat{E}(\vec{r}_\perp, z, \omega)}_{\text{langsam in } z} e^{ik(\omega)z}$

Wurde im freien Raum bereits abgeleitet

(siehe I)

$$\Big(\Delta_\perp + \underbrace{2ik(\omega)\,\partial_z}_{\gg\, \partial_z^2 \text{ weil } \hat{E} \text{ lgs in } z.} + \cancel{\partial_z^2} - k^2(\omega)\Big)\hat{E} + f^2(\omega)\hat{E} = -\mu_0\omega^2 \hat{P}_{res}$$

analoger Ansatz f. P

$$(\Delta_\perp + 2ik(\omega)\,\partial_z)\hat{E} + \underbrace{(f^2 - k^2)}_{?}\hat{E} = -\mu_0\,\omega^2\,\hat{P}_{res}$$

$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ wäre im Vakuum Null

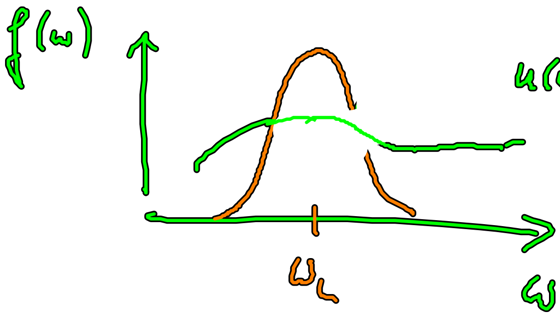
Wählen, so daß nun der Term wieder ≈ 0 herauskommt:

$$(f^2 - k^2) = (f-k)\underbrace{(f+k)}_{\approx 2k} \approx (f-k)\,2k \,, \quad f = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}$$

$$\approx \Big\{ f(\omega_L) + f'(\omega_L)\Delta\omega + \frac{1}{2} f''(\omega_L)\Delta\omega^2 - k(\omega) \Big\} 2k(\omega)$$

f an Stelle der Trägerfrequenz entwickeln

Ansatz, noch offen wählen: $k(\omega) = f(\omega_L) = \frac{n(\omega_L)\,\omega_L}{c}$



$n(\omega)$, $f(\omega)$ ändern sich schwach

$$\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \partial_z - i f_L' \Delta\omega - \frac{i}{2} f_L'' \Delta\omega^2 \right) \hat{E}(\omega) = \frac{i\mu_0\omega^2}{2k_L} \tilde{P}_{NL}(\omega)$$

$$\underbrace{f_L' = f'(\omega_L),\ f_L'' = f''(\omega_L)}_{\text{am besten aus Exp. bestimmen}},\ \underbrace{k(\omega) = k_L = k(\omega_L)}_{\text{festgelegt}}$$