Stand Amplitudengleichung

$$\left(\frac{\Delta_\parallel}{2ik_L} + \partial_z - i k_L' \Delta\omega - \frac{i}{2} k_L'' \Delta\omega^2 \right) \tilde{E}(\omega) = \frac{i\mu_0\omega^2}{2k_L} \tilde{P}_{NL}(\omega)$$

$$k = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}$$

$$k_L' = k' \Big|_{\omega=\omega_L}$$

$$k_L'' = k'' \Big|_{\omega=\omega_L}$$

$$\omega^2 = (\omega - \omega_0 + \omega_0)^2$$
$$= \Delta\omega^2 - 2\Delta\omega\,\omega_0 + \omega_0^2$$
$$\approx \omega_0^2$$

in den Zeitraum zurückgehen:

$$\tilde{E}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\Delta\omega t}\, \hat{E}(t)$$

lgs. Amplitude im Zeitbereich

$$E(t) \rightarrow \hat{E}(t)\, e^{-i\omega_L t}$$

FT bzgl. $\Delta\omega$ → Gleichg. f. lgs. Amplitude $\hat{E}(t)$

$$\hat{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\Delta\omega t}\, \hat{E}(\omega)\, \frac{1}{2\pi}$$

rechter Vorfaktor: $\mu_0 \frac{\omega_L^2}{k_L} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0\, \omega_L^2}{k_L\, \varepsilon_0} = \frac{\omega_L^2}{c^2 k_L^2}\, \frac{k_L}{\varepsilon_0} = \frac{k_L}{n_L^2\, \varepsilon_0}$

$$n_L = n(\omega = \omega_L)$$

Rücktrafo in Zeitbereich:

$$\boxed{\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \partial_z + k_L'\,\partial_t + \frac{i}{2}\,k_L''\,\partial_t^2\right)\hat{E}(t) = i\,\frac{k_L}{2n_L^2\,\varepsilon_0}\,\hat{P}_{NL}(t)}$$

- verkürzte Wellengleichung f. Amplitude $\hat{E}$
- Amplitudengleichung

1.2. Diskussion der Amplitudengleichung

Einführung der reduzierten Koordinaten

$\xi = z \,,\quad y = t - \frac{z}{v_g} \,,\quad v_g^{-1} = \beta_L'$

analog. freier Raum: $v_g \to c$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta_{\parallel}}{2 i k_L} + \frac{i}{2} k_L'' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{E}(y) = i \frac{k_L \hat{P}_{res}(y)}{k_L^2 \varepsilon_0 \, 2}$$

a b c d

$\hat{E}, \hat{P}$ sind Funktion von $\xi, \vec{r}_{\perp}, y$

$\beta_L' \equiv k_L' \,,\quad \beta_L'' \equiv k_L''$

a) $\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{E} \rightarrow$ Ausbreitung in z-Richtung

b) $\Delta_{\parallel} \hat{E} \rightarrow$ Verhalten des Strahls in x, y Richtung
($\perp$ zur Ausbreitungsrichtung)

c) $\partial_y^2 \hat{E} \rightarrow$ Gruppengeschwindigkeitsdispersion
k_L'' Dispersionskonstante
verantwortlich für Auseinanderlaufen eines Wellenpakets $\hat{E}$

d) $\hat{P}_{res} \rightarrow$ Einfluß der resonanten Dipoldichte wird abgeschätzt mit $n_L^2 \varepsilon_0 \approx \varepsilon \varepsilon_0^2$

$$k_L' = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\underbrace{\frac{\omega\, n(\omega)}{c}}_{f}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_L} \equiv \frac{1}{v_g}$$

k_L' bestimmt die inverse Gruppengeschwindigkeit

$$= \left(\frac{n}{c} + \frac{\omega\, n'}{c}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_L}$$

$$\Rightarrow \quad v_g = \frac{c}{n_L}\left(\frac{1}{1+\frac{\omega_L\, n_L'}{n_L}}\right)$$

Phasengeschwindigkeit

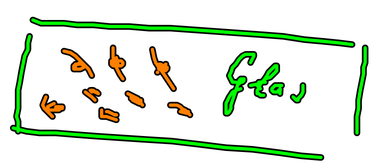
Dispersion

2. Pulsausbreitung in ausgedehnten Medien für ebene Welle ($\Delta_{\parallel} = 0$)

2.1. Lineare Pulsausbreitung

2.1.1. Wechselwirkung mit nichtresonanten Dipoldichte ($P_{res.} = 0$)

„Hintergrundsmedium“

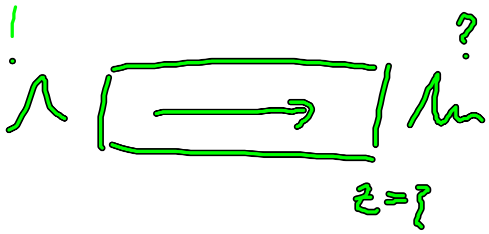


$n(\omega)$

$$\rightarrow \left(\underset{ⓐ}{\frac{\partial}{\partial \xi}} + \underset{ⓑ}{\frac{i}{2} k_L'' \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) \hat{E}(y, \xi) = 0$$

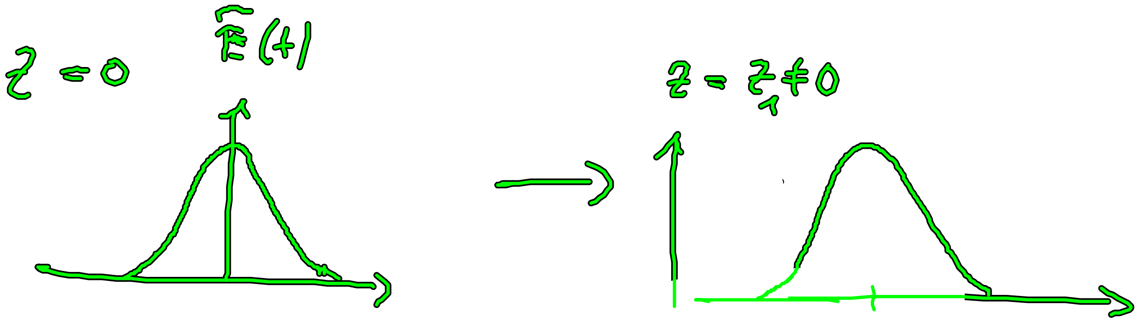
a/ ohne Gruppengeschwindigkeitsdispersion $k_L'' = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{E} = 0 \quad , \quad \hat{E} = \hat{E}(\underset{z}{\underset{\shortparallel}{\xi}}, y)$$

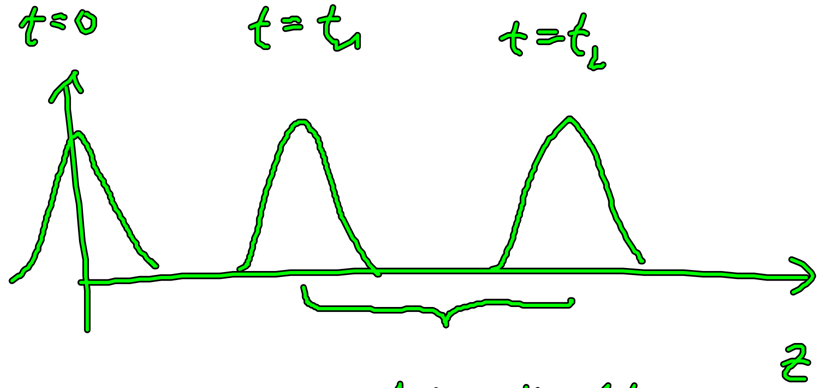


$$\Longrightarrow \hat{E} = \underbrace{\hat{E}\left(y = t - \frac{z}{v_g}\right)}_{\text{beliebige Funktion}}$$

→ Puls breitet sich forminvariant aus,
und der Gruppengeschwindigkeit v_g



Anfangsbed. t $\qquad$ z_1/v_g $\qquad$ t



$$\Delta z = v_g \Delta t$$
$$= v_g (t_2 - t_1)$$

b) mit Gruppengeschwindigkeitsdispersion $k_L'' \neq 0$

$$\left(\partial_\xi \hat{E} + \frac{i}{2} k_L'' \partial_\tau^2 \hat{E} \right) = 0$$

lineare Dgl., sieht aus wie Schrödingergl.

(mal „i" nehmen, Ort und Zeit haben Rolle vertauscht, Dispersionsrelation der Dgl. sind ähnlich)

Lösung analog zu QM: Fouriertrafo, Lösg. im ξ-Raum

$$\partial_\xi \tilde{\hat{E}} = \frac{i}{2} k_L'' \Delta\omega^2 \tilde{\hat{E}} \qquad \text{im } \Delta\omega\text{-Fourierraum}$$

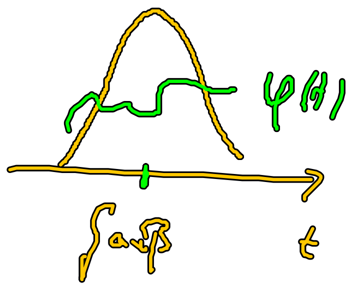
$$\rightarrow \tilde{\hat{E}} = \underbrace{\tilde{\hat{E}}(\xi = 0, \Delta\omega)}\, e^{\frac{i}{2} k_L'' \Delta\omega^2 \xi}$$

AB bei $\xi = z = 0$

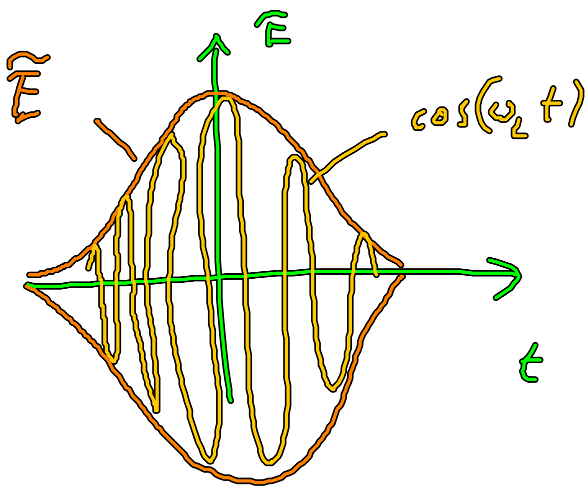
kann vorgegeben werden

$$\tilde{E}(\xi = 0, t) = \frac{1}{2} A_0 \, e^{-\gamma_0 t^2 + i\beta_0 t^2}$$

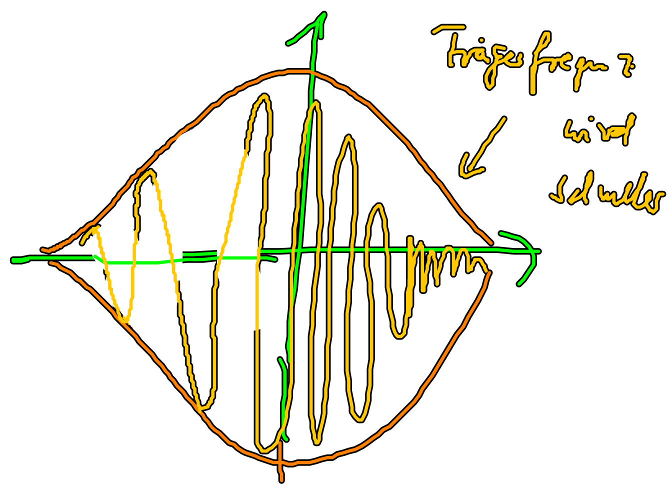
Phasenmodulation



Phasen-modulation: $\varphi(t) = \varphi_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$



$\beta_0 = 0$



$\beta_0 \neq 0$

$$\varphi_{ges} = \omega_L t + \varphi(t)$$

instane Trägerfrequenz $\omega_L + \dot{\varphi} = \omega_L + \beta t$

„der Puls hat einen chirp"

up chirp $\beta_0 < 0$

down chirp $\beta_0 > 0$

Lösung im Orts-Zeitraum (ohne Beugung):

Intensität $\hat{E}\hat{E}^* = \frac{1}{4} A^2(\xi)\, e^{-\gamma(\xi) y^2}$

Amplitude   Gaußpuls

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\tau_L^2(\xi)} \longrightarrow \frac{\tau_L(\xi)}{\tau_L(\xi=0)} = \left\{ 1 + 2\beta_0 k_L'' L_D \left(1 - \left[1 - \frac{\xi}{L_D}\right]^2\right) \right\}^{1/2}$$

zeitl. Breite d. Pulses

$$L_D = \text{Dispersionslänge} = -\frac{\beta_0}{2 k_L'' (\beta_0^2 + \gamma_0^2)}$$

$$A^2(\xi) = A_0^2 \frac{\tau_L(0)}{\tau_L(\xi)}$$

Amplitude am Beginn

Bemerkungen:

a) offensichtlich handelt es sich um einen Gaußpuls der ein von $\xi = z$ abhängige Amplitude und Dauer $\tau_L(\xi)$

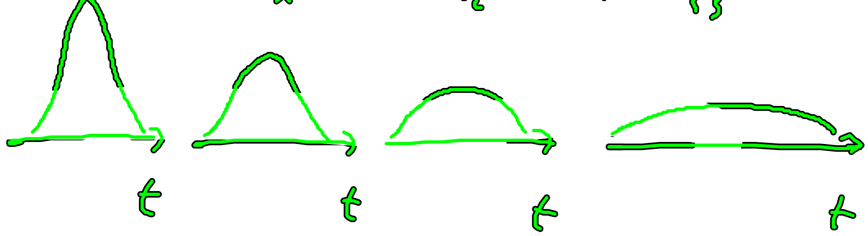
b) $\xi = 0 \rightarrow \tau_L(\xi) = \tau_L(0)$

c) große ξ: $\tau_L(\xi) \propto \tau_L(0) \cdot \xi$

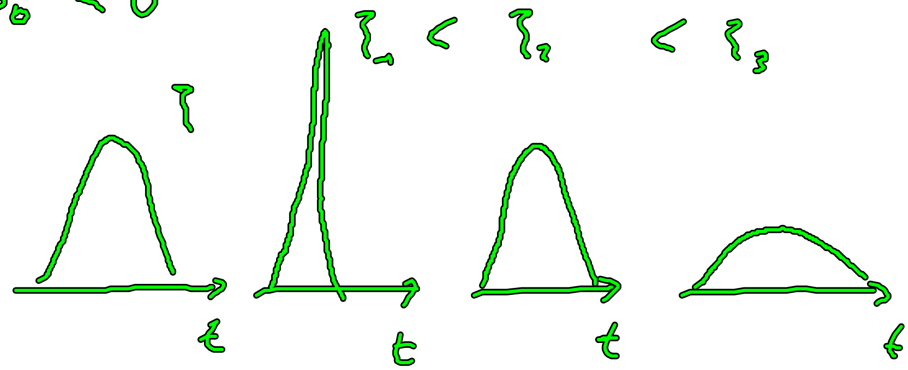
$$A(\xi) \propto \tau_L(0) / \xi$$

d) $k_L'' \beta_0 > 0$

$$\xi < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3$$



e) $k_L'' \beta_0 < 0$



eine Verkürzg. d. Pulses ist bis zu Dispersionslänge L_D mögl.

2.1.2 Wechselwirkung mit der resonanten Dipoldichte

$k_L'' = 0 \quad , \quad \tilde{P}_{res}(t) \neq 0$

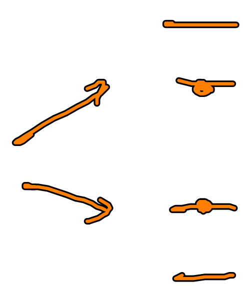
$$\| \quad \partial_\xi \tilde{E} = i \frac{k_L}{n^2 \varepsilon_0} \tilde{P}_{res} \quad [f(\xi,\eta)]$$

hierfür ist Gleichung nötig

Zwei-Niveau-System $\quad P_{res} \sim \rho_{12}$

$$\| \quad \dot{\tilde{\rho}}_{12} = i \tilde{\Omega}_{21} \Delta_0 - \gamma \tilde{\rho}_{12}$$

Inversion $\Delta_0 = \rho_{11} - \rho_{22}$ = konstant



$\tilde{\Omega}_{21} = \tilde{\Omega}$

$$-i\Delta\omega\,\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega) = i\,\tilde{\Omega}(\Delta\omega)\,\Delta_0 - \gamma\,\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega)$$

umstellen und einsetzen in Amplitudengl.

$$\partial_z \tilde{\Omega} = \frac{i k_L d_{21}}{n_L^2 \varepsilon_0 \hbar} n_0 \left(d_{12}\,\tilde{\rho}_{12} + \cancel{c.c.} \right)$$

Anzahldichte

nichtresonant

($\omega_L = \omega_{21}$ angenommen)

$$\partial_z \tilde{\Omega}(\Delta\omega) = i\alpha\,\tilde{\rho}_{12}(\Delta\omega) = i\alpha \frac{i\tilde{\Omega}\Delta_0}{\gamma - i\Delta\omega} = -\alpha\Delta_0 \frac{\tilde{\Omega}}{\gamma - i\Delta\omega}$$

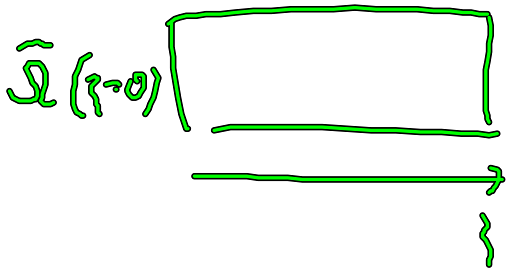
$$\alpha = \frac{k_L n_0 |d_{12}|^2}{n_L^2 \hbar\, \varepsilon_0}$$

$$\tilde{\Omega}(z,\Delta\omega) = e^{-\frac{\sigma(\omega)}{2} z}\, \Omega(z=0,\Delta\omega)$$

$$\frac{\sigma(\omega)}{2} = \frac{\alpha}{\gamma - i\Delta\omega} = \frac{\gamma + i\Delta\omega}{\gamma^2 + \Delta\omega^2}$$

<u>Meßgröße</u>: $-\frac{1}{z}\ln\left|\frac{\tilde{\Omega}(z,\Delta\omega)}{\tilde{\Omega}(0,\Delta\omega)}\right|^2 \equiv \kappa(\omega) = \mathrm{Re}\,(\sigma(\omega))$

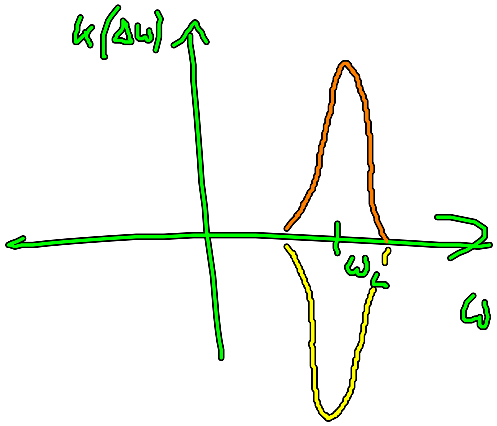
„Absorptions-koeffizient"

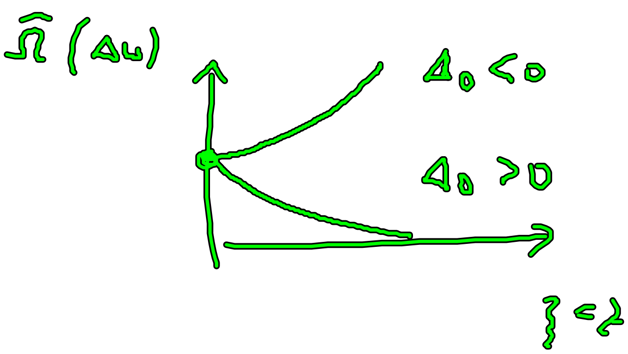


$$\kappa(\Delta\omega) = \frac{\gamma \Delta_0}{\gamma^2+\Delta\omega^2}\,\alpha$$

$\Delta_0 < 0$ Verstärkung.

$\Delta_0 > 0$ Absorption





alles Frequenzraum bisher