Diskussion der Solitärwellen Lösung

a) Pulsform $\quad \tilde{\Omega}(s) = \partial_s \, \theta(s) \quad \left(= \int_{-\infty}^{s} ds' \, \tilde{\Omega}(s') \right)$

$$\theta(s) = \partial_s \; 4 \, \mathrm{artg} \left(\exp \frac{s}{\tau} \right)$$

$$\downarrow \quad \tilde{\Omega}(s) = 4 \, \frac{1}{\left(e^{s/\tau}\right)^2 + 1} \, e^{s/\tau} \, \frac{1}{\tau}$$

$$= \frac{2}{\tau} \, \frac{2}{e^{s/\tau} + e^{-s/\tau}} = \frac{2}{\tau} \, \frac{1}{\mathrm{ch}\left(s/\tau\right)}$$

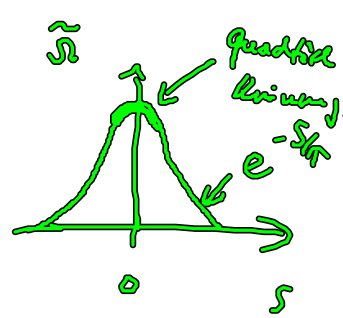
Der gefundene forminvariante Puls hat die Form

$$\tilde{\Omega}\left(s = y - \frac{z}{v}\right) = \frac{2}{\tau} \; \mathrm{sech}\left(\left(y - \frac{z}{v}\right)/\tau\right)$$

Amplitude $\qquad\qquad$ Dauer des Pulses

τ bestimmt die Zeitdauer und die Amplitude.

Pulsform ist durch Secans hyperbolicus gegeben.



b) Ausbreitung:

$$\xi = z$$

Koordinate: $$s = y - \frac{\xi}{v} = \overbrace{t - \frac{z}{c}}^{y} - \frac{z}{v} = t - \frac{z}{v_s}$$

Geschwindigkeit

$$\underbrace{\frac{z}{c} + \frac{z}{v}}_{z\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{v}\right)}$$

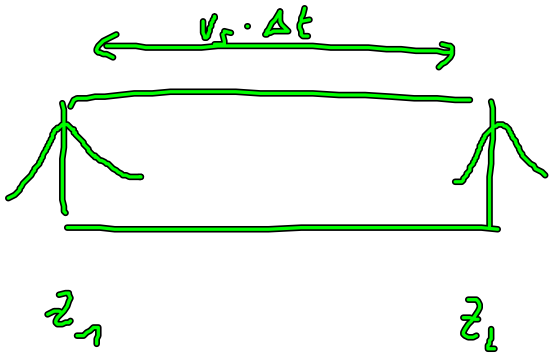
Pulsgeschwindigkeit

$$v_s = \frac{v \cdot c}{v + c} \Rightarrow v$$

$$v = \frac{\beta}{\tau^2} \ll c$$

β - Materialkonstante

v_s kann gemessen werden



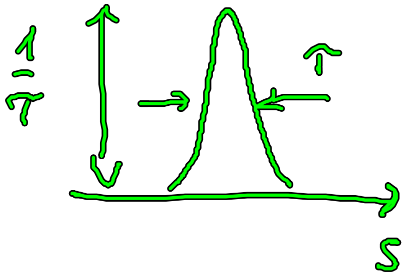
Parameter in Lösung: - $\tau \rightarrow$ beliebig wählbar als externer Parameter

- wenn τ festgelegt ist dann v bestimmen aus

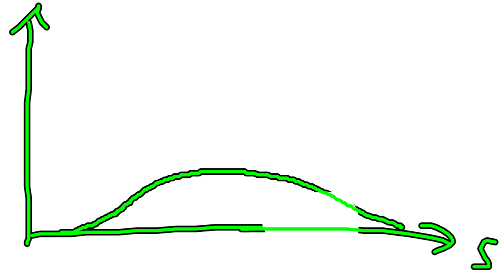
$$\tau^{-2} = \frac{v}{\beta} \rightarrow v(\tau)$$, denn β ist

durch Materialparameter festgelegt $\left(\sim (d_z)^2\right)$

τ wird variiert: bedeutet Amplitude und Pulsdauer ändern



oder



„schlanke und große" „dicke und kleine"

weil $v \sim \frac{1}{\tau^2}$ ist bewegen sich die dünnen schneller.

(steht in einigen Büchern anders)

c) Pulsfläche: $\Theta(s \to \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \, \tilde{\Omega}(s') = 2\pi$

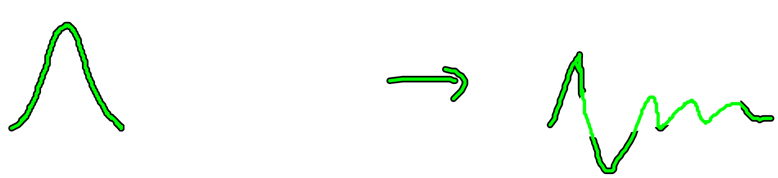
durch Einsetzen

– Deshalb wird dieser Puls „2π-Puls" genannt.

(„2π-Soliton")

– man kann zeigen:

(i) $\Theta_{z=0} = 2\pi - \varepsilon \longrightarrow \Theta_{\zeta \to \infty} = 0$

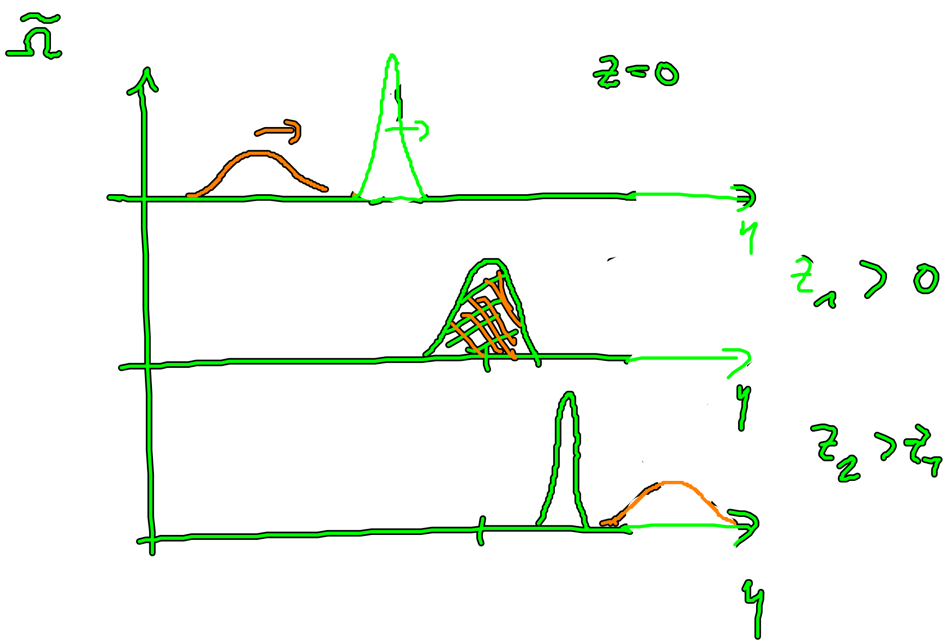


(ii) $\Theta_{z=0} = 2\pi + \varepsilon \longrightarrow \Theta_{\zeta \to \infty} = 2\pi$ (wird zur solitär Welle)

(siehe Flächentheorem)

e) Solitoncharakter: Solitäre Welle die miteinander kollidieren aber nach der Kollision wieder mit der vorherigen Form weiterpropagieren werden Solitonen genannt.

(Lösungen solcher Probleme über <u>inverse Streutheorie</u>)



wächst die Zeit

2.2.2. Kerreffekt und Selbstphasenmodulation

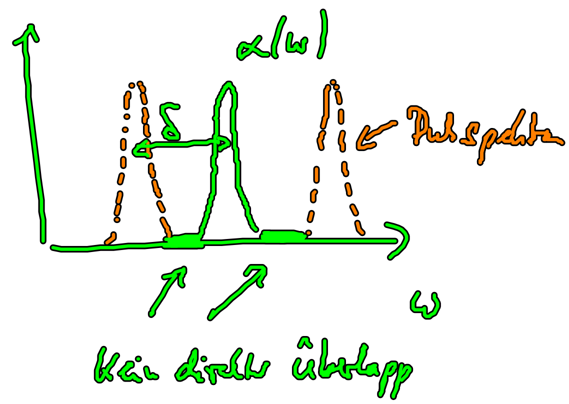
Kernnichtlinearität ist $\tilde{P}_{nl} = \alpha \left|\tilde{E}(\vec{r},t)\right|^2 \tilde{E}(\vec{r},t)$

Kerrnichtlinearität $\sim E^3$

$\sim$ nicht retardiert (instantan)

(nicht $\int^t dt' \, \tilde{E}(t')$ sondern immer zum aktuellen Zeitpunkt t)

kann abgeleitet werden für eine nichtresonante Anregung:



$$\rho_{12}\Big|_{Kerr} = -\frac{1}{2}\,\frac{|\tilde{\Omega}_{12}(\vec{r},t)|^2\,\tilde{\Omega}_{12}(\vec{r},t)}{\delta_{12}^3} \rightarrow \alpha_0 |\tilde{\Omega}|^2 \tilde{\Omega}$$

Verstimmung

Konstante $\lessgtr 0$

„adiabatische Folge“

die folgende Wellengleichung gilt: (NL einsetzen)

$$\left(\partial_z + \frac{\Delta_\perp}{2ik_L} + \frac{i}{2} k_L'' \partial_t^2\right)\tilde{\Omega} = i\,\frac{k_L n_0 |d_{12}|^2}{2 n_L^2 \varepsilon_0}\,\alpha_0 |\tilde{\Omega}|^2 \tilde{\Omega}$$

Ausbreitg. in z Richtg.

Profil des Strahls in x-y Richtg.

„Beugung an Vorgegebenen Form"

Gruppengeschwindigkeitsdispersion

„Zerfließen d. Pulse in der Zeit"

Kerrnichtlinearität

„Selbstphasenmodulation"

„Selbstfokussierung"

$$\underbrace{\quad}_{= i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}}$$

ist sinnvoll Schreibweise: Δn stellt eine Art Brechzahländerung dar die proportional zu $|\tilde{\Omega}|^2$ ist.

ist zu zeigen:

nur Kerr-NL:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}$$

, Δn = Konstant setzen (ist es nicht)

$$\tilde{\Omega}(\zeta, \omega) \simeq \tilde{\Omega}(\zeta=0, \omega)\, e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \zeta}$$

Schnelle Größen $\tilde{\Omega} \to \Omega$

$$\Omega(\zeta, \omega) \simeq \tilde{\Omega}(\zeta=0, \omega)\, \underbrace{e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \zeta}\, e^{i k_L z}}_{e^{i k_L \left(1 + \frac{\Delta n}{n_L}\right) z}}$$

$$k_L = \frac{n_L \omega_L}{\quad}$$

$$e^{i \frac{\omega_L}{c}(n_L + \Delta n) z}$$

Brechzahl im Hintergrundmedium — Korrektur zu Brechzahl

$\Delta n \propto n_2 |\tilde{E}|^2$ bedeutet, daß eine intensitätsabhängige Brechzahl Δn vorliegt.

$n_2 \hat{=}$ nichtlinearer Brechzahlkoeffizient

Prinzipielle Diskussion des Kerreffekts

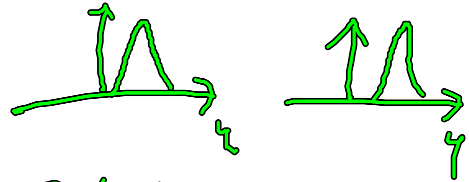
$$\tilde{\Omega} = A e^{i\phi} \quad \text{Amplitude – Phasen Zerlegg.}$$

der Gleichung $\quad \partial_\zeta \tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}$

Ansatz einsetzen:

$$(\partial_\zeta A) e^{i\phi} + i(\partial_\zeta \phi) A e^{i\phi} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} A e^{i\phi}$$

$\to \partial_\zeta A = 0$ Kerr NL ändert nicht die Amplitude als Funktion d. Orts $\longrightarrow z_1 \neq z_2$



Zeitabh. sind identisch

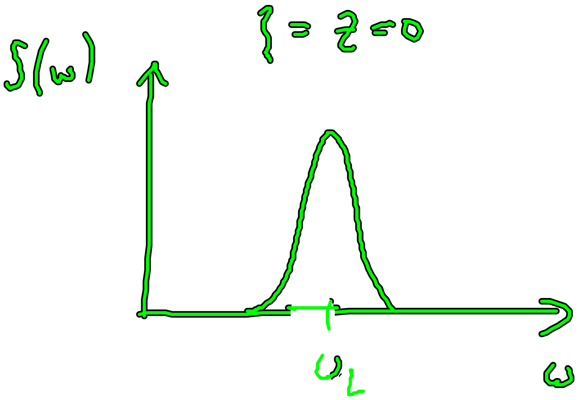
$$\to \partial_\zeta \phi = k_L \frac{\Delta n(A^2)}{n_L}$$

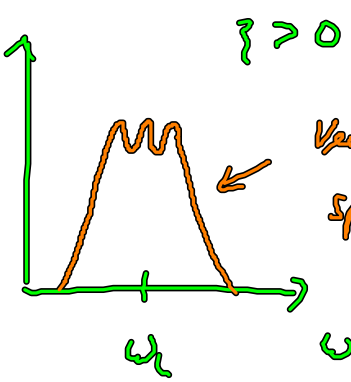
$$\phi = \frac{k_L \Delta n(A^2)}{n_L} \cdot \zeta$$

Der Puls sammelt mit zunehmender Ausbreitungslänge eine Phase auf die proportional zu $A^2(y)$ ist.

Man spricht von Selbstphasenmodulation.

$$\underset{\text{Spektrum}}{S(\omega)} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\Delta\omega t + i\underset{\text{Modell}}{\phi(t)}}\, \tilde{E}(\zeta=0, t) \right|^2$$





Verbreiterung und spektrale Modulationen durch d. Kerreffekt

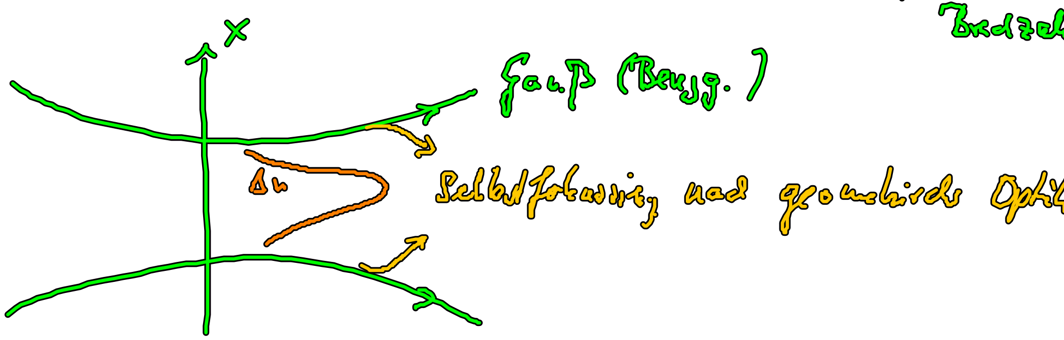
Der zeitliche Intensitätsverlauf verändert sich nicht.

2.2.3. Kerreffekt und Selbstfokussierung

- Wellengleichung mit Beugungsterm $\Delta_\parallel$, ∂_z + Kerr NL
  also transversale Effekte (x, y) mitnehmen
- $k_L'' \to 0$

$$\partial_z \tilde{\Omega} + \frac{\Delta_\perp}{2 i k_L} \tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}$$

beschreibt ein Strahlverlauf unter Einwirkung von a) Beugung $\Delta_\perp$ b) nichtlineare Brechzahl Δn



$$E = A e^{i\phi} \to \text{2 Gleichungen für } \phi, A$$

$$k_L \partial_z A^2 = - \vec{\nabla}_\perp \cdot \left(A^2 \vec{\nabla}_\perp \phi \right)$$

$$\partial_z \phi + \underbrace{\frac{1}{2 k_L} \left(\vec{\nabla}_\perp \phi \right)^2}_{\text{kinetisch}} - \frac{k_L}{2} \left(\frac{\Delta_\perp A}{k_L^2 A} + \underbrace{2 \frac{\Delta n}{n_L}}_{\text{potentiell}} \right) = 0$$

Die zweite Gleichung ist in der Form einer Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\partial_t \underline{\underline{S}} + H = 0$$

$\phi \longleftrightarrow S$ (Wellenfront bzw. Führungsfeld)

$z \longleftrightarrow t$

$r_\parallel \longleftrightarrow q$ (Lagekoordinate q)

$k_L \longleftrightarrow m$ (Masse)

V kann an $H = E_{kin} + V$ sofort abgelesen werden

V ist unserem Fall von A^2 abhängig, weil $\Delta n = \Delta n(A^2)$

Ansatz für A als Gaußstrahl

$$A(\vec{r}_\parallel, z) = A_0 \frac{a_0^2}{a^2(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2 a^2(z)}\right)$$

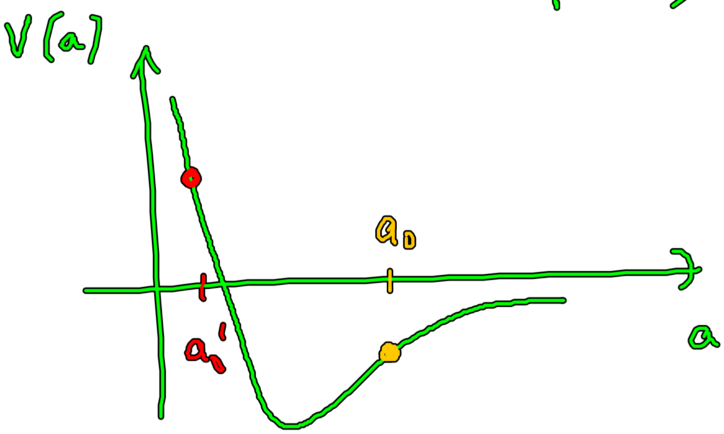
- a ist die Breite des Gaußstrahls, die von der Ausbreitungslänge z abhängt.
- $a_0 = a(z=0)$
- Potential ausrechnen und diskutieren

  eine spezielle Trajektorie $r = a(z)$ wählen

Kerr NL Koeffizient

$$V(a) = -k_L\left(-\frac{1}{2k_L^2 a^2} + \gamma_0 \frac{1}{a^4}\right)$$

Vorzeichen verschieden

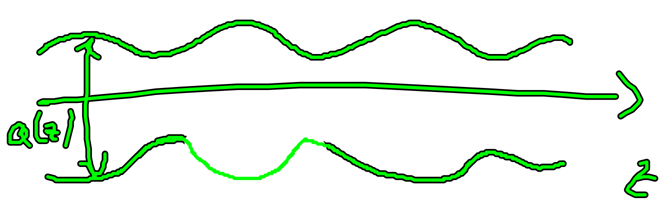


$$H = \frac{k}{2}\left(\frac{da}{dz}\right)^2 + V(a)$$

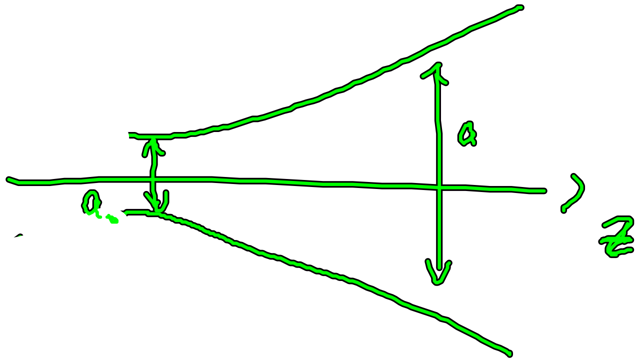
AB $a' = a'(z=0)$

Die Lichttrajektorie $a(z)$ kann so diskutiert werden als wenn sich ein Teilchen in diesem Potential bewegt.

Für die AB a_0 wird eine oszillatorische Bewegung von a als Funktion von z erfolgen:



Für die AB a_0' ist keine Fokussierung mögl.,
der Strahl divergiert.


a
a
z