2.2.4. Kerreffekt und Solitonlösungen

Wellengleichung für Amplitude $\tilde{E}$ mit

Kernnichtlinearität $\alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}$:

$$\left(\partial_\xi + \cancel{\frac{\Delta_\parallel}{2ik_L}} + \frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2 \right) \tilde{E} = i \alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}$$

ebene Wellen (Ansatz)

Kernnichtlinearität

die Gleichung ohne $\Delta_\parallel$ ist die sogenannte

nichtlineare Schrödingergleichung.

Analogie zur Schrödingergleichung (x, t, ψ)

$\xi \leftrightarrow t$, $\eta \leftrightarrow x$, $\tilde{E} \leftrightarrow \psi$

führt auf der linken Seite zur Standard-

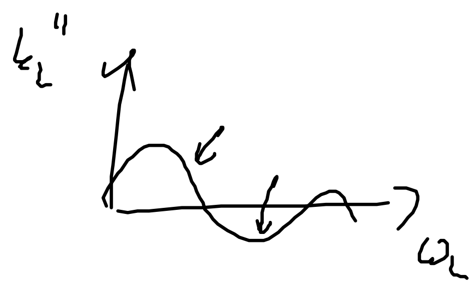
Schrödingergleichung, rechte Seite: Nichtlinearität

- stellt auch Bsp. für nichtlineare Feldtheorie dar.

  (Verallgemeinerung: Ginzburg – Landaugleichung für Phasenübergänge)

- Diskussion der nl. Schrödingergleichg. in reduzierten Koordinaten

  Normalfall $k_L'' < 0$ in viel Materialien mit Dispersion, hängt aber vom konkreten Material und ω_L ab



$$q = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_0} \, , \quad \zeta \to \frac{\zeta}{\zeta_0} \quad \text{mit} \quad \zeta_0^{-1} = \alpha_K \, |\tilde{E}_0|^2$$

$$y \to \frac{y}{y_0} \quad \text{mit} \quad y_0 = \left(\zeta_0 \, (-k_L'')\right)^{1/2} \quad \text{wegen } k_L'' < 0$$

typische Skala mit q: normiertes Feld, sodaß $q \sim 1$ wenn man $\tilde{E}_0$ später wählt

zur Umschreibg. Gleichg. mit ζ_0 multiplizieren:

$$\left(\partial_{\xi/\xi_0} + \frac{i}{2}\,\underbrace{\xi_0 k_L'' \frac{1}{y_0^2}}_{\xi_0 k_L'' \,/\, \xi_0(-k_L'')}\,\partial^2_{y/y_0}\right)\tilde{E} = i\,\underbrace{\alpha_K \xi_0 |\tilde{E}|^2}_{|q|^2}\,\tilde{E} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\tilde{E}_0}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\partial_\xi - \frac{i}{2}\partial_y^2\right) q = i\,|q|^2\, q$$

q ist das gesuchte Feld in den dimensionslosen Koordinaten

Bemerkungen:

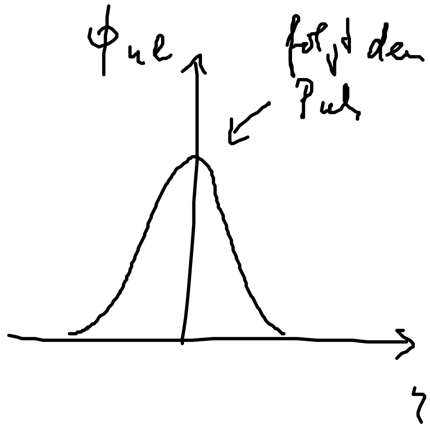
a) kubische NL in dieser Gleichg. wird für viele physikalische Phänomene verwendet

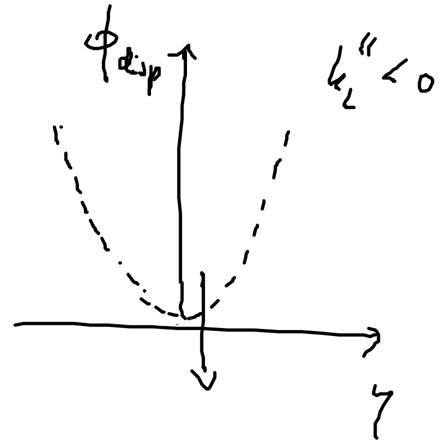
b) neben der NL tritt Dispersion auf (zweite Zeitableitg ∂_y^2) diese führt zu Verbreiterung d. Pulse im Zeitbereich

c) Nichtlinearität und Dispersion führen zu Phasenmodulation:

$$\phi_{nl} = \alpha_K \left|\tilde{E}(\xi=0,y)\right|^2 \xi \quad \text{(Selbstphasenmodulation)}$$

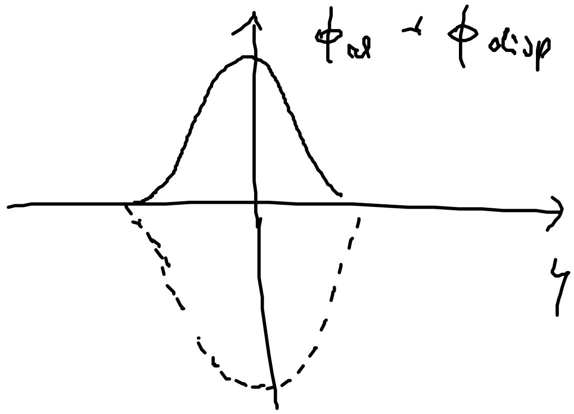
$$\phi_{disp} = -2\,\underbrace{\rho_0^2}_{\text{Pulsdauer}^{-4}}\, k_L''\, y^2\, \xi \quad \text{(Gruppengeschwindigkeitsdispersion)}$$





Setze beide gleichzeitig auf und beide prop. zu ξ.

<u>Summe beider Phasen</u> kann „in etwa" kompensieren



wenn man noch eine Phasenverschiebung einbaut

für $k_L'' < 0$ kann es zu einer gegenseitigen Auslöschung von Nichtlinearität und Dispersion kommen.

(für bestimmte Parameter γ_0, $\bar{E}_0$) $\Rightarrow$ Solitäre Welle

für $k_L'' > 0$ $\rightarrow$ führt zu Verbreiterung des Pulses

Zur Beschreibg. der solitären Welle: Ansatz

$$q(\xi, y) = A(y - v_s \xi)\, e^{i\phi\xi + i\gamma y}$$

Geschwindigkeit der solitären Welle, forminvariant

$\phi, \gamma \rightarrow$ Konstanten die frei wählbar sind

gesucht ist $A(y - v_s \xi) = ?$

Gleichg. für A durch Einsetzen in die Schrödingergl.:

$$i\partial_\xi q + \frac{1}{2}\partial_y^2 q + |q|^2 q = 0$$

$$\underline{\underline{i\partial_\xi A}} - \phi A + \frac{1}{2}\partial_y^2 A + \underline{\underline{i\gamma\partial_y A}} - \frac{1}{2}\gamma^2 A + A^3 = 0$$

verwende der Phasenfaktoren γ, ϕ: (wählen!)

$\underline{\underline{(i)}}$ $\gamma = v_s$ bringt die erste Ableitg zum Verschwinden

denn $\partial_\xi A = \partial_y A \cdot (-v_s)$

(ii) fassen $\phi + \frac{1}{2}\gamma^2 = \phi + \frac{1}{2}v_s^2 \equiv B_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\partial_y^2 - B_0\right) A + A^3 = 0$$

eigentlich gewöhnliche Dgl. $\to$ nichtlinear

Und $\partial_y A$ multiplizieren:

$$\frac{1}{2}\,\partial_y A\,\partial_y^2 A = B_0\, A\,\partial_y A - A^3\,\partial_y A$$

$$\frac{1}{4}\,\partial_y\left((\partial_y A)^2\right) = \frac{1}{2} B_0\,\partial_y A^2 - \frac{1}{4}\,\partial_y A^4$$

integriere $\int dy$

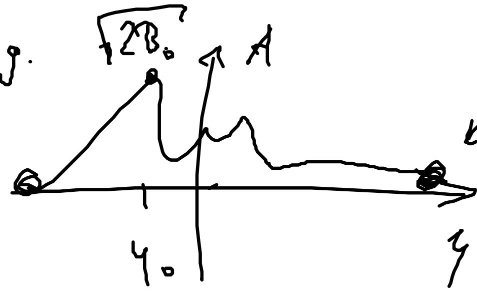
$$(\partial_y A)^2 = 2 B_0 A^2 - A^4 + C_0$$

Integrationskonstante

1. Ordng. nl. Dgl.

Charakter der Lösg. hängt v. Integrationskonstante ab, sieht man an Verhalten A', A bei $y \to \pm\infty$

für lokalisierte Lsg.



$A(y \to \pm\infty) = 0$

ist also $C_0 = 0$

$$\frac{dA}{dy} = A\sqrt{2B - A^2} \quad \longrightarrow \text{ Trennung der Variablen}$$

$$dy = \frac{dA}{A\sqrt{2B_0 - A^2}}$$

$$\int_{y_0}^{y} dy' = y - y_0 = \int_{\sqrt{2B_0}}^{A} dA' \frac{1}{A'(2B_0 - A'^2)^{1/2}}$$

$A' \le \sqrt{2B_0}$

$a^2 = 2B_0$ gesetzt

A als reelle Amplitude

Integraltafel

$$y - y_0 = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - A'^2}}{A'}\right)\Bigg|_a^A$$

$$= -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-A^2}}{A}\right) + \underbrace{\frac{\ln 1}{a}}_{=0}$$

$$e^{-a(y-y_0)} = \frac{a+\sqrt{a^2-A^2}}{A}$$

implizite Gl. f. $A(y)$

<u>ebenso gilt:</u>

$$e^{+a(y-y_0)} = \frac{A}{a+\sqrt{a^2-A^2}}$$

<u>dann bilden:</u>

$$\frac{e^{-a(y-y_0)} + e^{a(y-y_0)}}{2} = \frac{1}{2} \frac{(a+\sqrt{})^2 + A^2}{A(a+\sqrt{})} = \frac{a}{A}$$

$$A(y) = a \operatorname{sech}(a(y-y_0)), \quad a = \sqrt{2B_0} = A_0$$

maximale Amplitude

sech taucht wieder als Soliton Welle auf

Die Gesamtlösg. ist Soliton Welle:

$$q = A_0 \operatorname{sech}\left\{A_0\left(\eta - v_s\xi - \eta_0\right)\right\} e^{i\left(v_s\eta - \frac{v_s^2}{2}\xi + \frac{A_0^2}{2}\xi\right)}$$

Amplitude — „Dauer" — Geschwindigkeit — Phase die nötig ist, um Kompensation NL $\longleftrightarrow$ Disp. zu erreichen

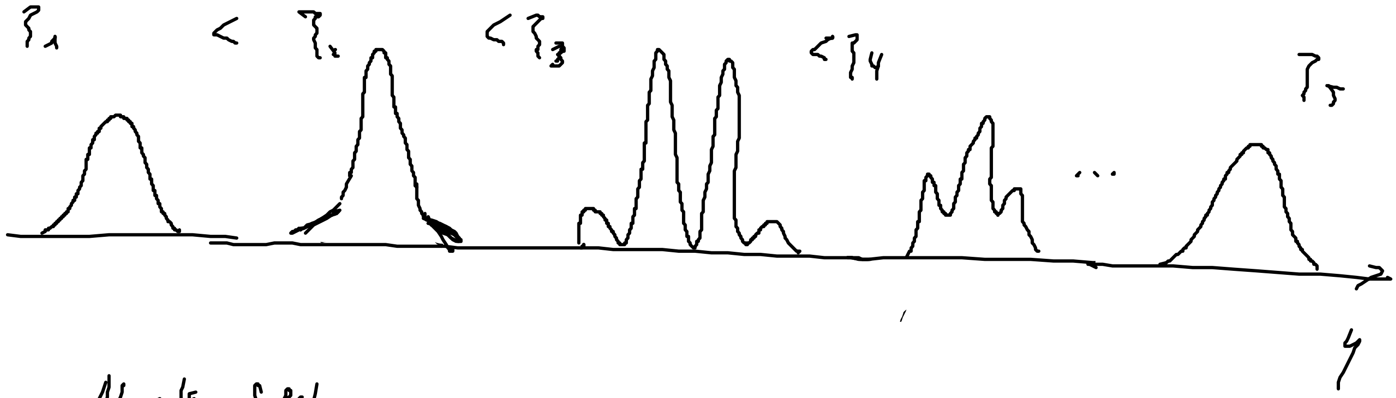
<u>Bemerkungen</u>:

a) Soliton Welle durch Kompensation von NL und Dispersion

$\alpha_K(u_2) > 0$, $k_L'' < 0$

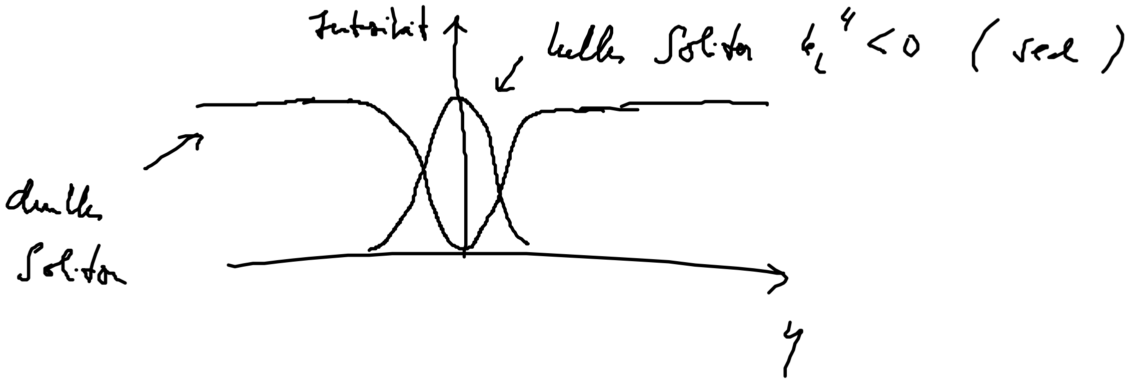
b) man nennt diese Lsg. auch Solitonen,
weil man zeigen kann, daß zerstörungsfreie

Überlagerg. mgl. ist: Schnappschüsse in Zeit:



$N = 4$ Soliton

c/f. $k_L'' > 0$ existiert ein dunkles Soliton



$$q = A_0 \tanh\left\{ A_0 \left(y - v_s \xi - y_0 \right) \right\} e^{i\left(-v_s y + \frac{v_s^2}{2}\xi + \frac{A_0^2}{2}\xi\right)}$$

ist ein dunkles Soliton

es existieren auch grau Soliton