5. Theorie der Laseremission

(Haken „Licht u. Materie", Band 2)

- Resonator im Medium:

ext. Pumpe

Metall

(durchlässig für Emission)

- Ansammlung von $\rho_{12}^i(t)$ Zweiniveausystemen (ZNS)
- Inversion: $\Delta_{12}^i = \rho_{11} - \rho_{22} < 0$
- skalare Theorie (1D)

- Vorgehen:

(1) Feldmoden (2) Materie

(3) Feld-Materie Kopplung

(4) Selbstkonsistente Lsg $\longrightarrow$ Lasergleichungen

5.1 Beschreibung des Lichts (klass.)

- Wellengl.: für $P=0$ Telegraphengl.

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\underline{E}(x,t) = \mu_0 \partial_t^2 \underline{P} + \mu_0 \partial_t \underline{j}(x,t)$$

Dipoldichte der ZNS : $\underline{P}(x,t) \leftarrow$ Materialtheorie

Ohm'sche Verluste : $j = \sigma \underline{E}$

$\uparrow$ Leitfähigkeit

- Modenentwicklung:

$$\underline{E}(x,t) = \sum_\lambda E_\lambda(t)\, \underline{u}_\lambda(x)$$

(i) befriedigen Rbd. an Metallspiegeln:

$$\partial_x^2 \underline{u}_\lambda(x) + k_\lambda^2 \underline{u}_\lambda(x) = 0 \quad \text{(im Resonator)}$$

(ii) vollständiges ONS

$$\langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = \int dx\, u_\lambda^*(x)\, u_{\lambda'}(x) = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

(iii) Lösung

$$\underline{u}_\lambda(x) = \underline{e}_\lambda N \sin(k_\lambda x) \quad \text{mit } k_\lambda = \frac{\lambda\pi}{L} \quad \lambda \in \{1,2,3,\ldots\}$$

Pol. richtung

Normierung

$$(k_\lambda \cdot c = \omega_\lambda)$$

$\longrightarrow$ Gl. für $E_\lambda(t)$ suchen

(1) Einsetzen der Modenentw. in Wellengl.

(2) $\int dx\, u_{\lambda'}^*(x)$ und $\langle u_\lambda | u_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda,\lambda'}$

(3) $\sigma(r) = \text{const}$, sonst $\sigma_{\lambda\lambda'} = \int dx\, u_\lambda^* \sigma u_{\lambda'}$

(4) $\underline{P}(x,t) = \sum_\lambda P_\lambda(t)\, \underline{u}_\lambda(x)$

$$\underline{P}(x,t) = \sum_i \left(\underline{d}_{12}\,\rho^i_{12} + c.c.\right)\delta(x-x_i)$$

(5) Trennen in pos. u. neg. Frequenzen

$$E_\lambda(t) = E^+_\lambda(t) + E^-_\lambda(t) = A^+_\lambda(t)\,e^{-i\omega_\lambda t} + A^-_\lambda(t)\,e^{i\omega_\lambda t}$$

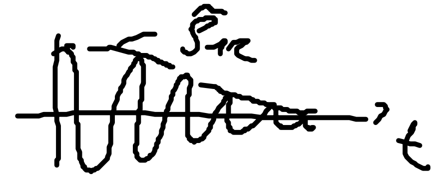
$$P_\lambda(t) = \sum_i \underline{u}^*_\lambda(x_i)\cdot\underline{d}_{12}\underbrace{\rho^i_{12}}_{e^{-i\omega_{21}t}} + \underline{u}_\lambda(r_i)\cdot\underline{d}_{21}\underbrace{\rho^i_{21}}_{e^{i\omega_{21}t}}$$

→ ergibt 2 Gl. (I):

$$\omega_\lambda^2 E^\pm_\lambda + \partial_t^2 E^\pm_\lambda + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\partial_t E^\pm_\lambda = -\frac{1}{\varepsilon_0}\partial_t^2 P^\pm_\lambda$$

- Slowly varying envelope approx.:

$$\rho_{12}(t) = \tilde{\rho}_{12}(t)\,e^{-i\omega_{21}t}$$



langsame Einhüllende

$$E^+_\lambda = A^+_\lambda(t)\,e^{-i\omega_\lambda t}$$

→ $|\partial_t \tilde{\rho}| \ll |\omega_{21}\tilde{\rho}_{12}|$ und $|\partial_t A_\lambda| \ll |\omega_\lambda A_\lambda|$

(a) erste Ableitung

$$\partial_t E^+_\lambda = (-i\omega_\lambda A_\lambda + \partial_t A_\lambda)\,e^{-i\omega_\lambda t} \approx -i\omega_\lambda A_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} = -i\omega_\lambda E^+_\lambda$$

(b) zweite Ableitung $|\partial_t^2 A_\lambda| \ll |\omega_\lambda \dot{A}_\lambda|$

$$\omega_\lambda^2 E_\lambda + \partial_t^2 E_\lambda^+$$
$$= e^{-i\omega_\lambda t}\left(\omega_\lambda^2 A_\lambda^+ - \omega_\lambda^2 A_\lambda^+ - 2i\omega_\lambda \dot{A}_\lambda + \ddot{A}_\lambda\right)$$
$$\approx -2i\omega_\lambda \dot{A}_\lambda^+ e^{-i\omega_\lambda t} = -2i\omega_\lambda \left(\dot{E}_\lambda^+ + i\omega_\lambda E_\lambda^+\right)$$

(c) Polarisation: $\ddot{P}_\lambda^\pm \approx -\omega_{12}^2 P_\lambda^\pm \approx -\omega_\lambda^2 P_\lambda^\pm$

Einsetzen eliminiert 2ten Ableitungen:

$$\boxed{\partial_t E_\lambda^+ = (-i\omega_\lambda - \kappa) E_\lambda^+ + \frac{i\omega_\lambda}{2\varepsilon_0} P_\lambda^+}$$

- Bemerkung:
  (a) Gl. für Stärke des E-Feldes der Mode λ
  (b) schwingt mit ω_λ (paßt Resonator)
  (c) gedämpft mit $\kappa = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
  (d) getrieben durch Dipole P_λ^+

- Dimensionslose Lichtmode:
  $$E_\lambda^+ = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, b_\lambda\,, \quad E_\lambda^- = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\, b_\lambda^*$$

- Bemerkung:
  (a) Energie des E-Feldes $E_\lambda \propto |E_\lambda|^2$
  (b) $\hbar\omega_\lambda \mathrel{\hat=}$ Energie eines Photons
  $|b_\lambda|^2 =$ Photonenzahl in Mode λ

• Stärke der Lichtmode:

$$\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa)\, b_\lambda - \frac{\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\hbar\omega_\lambda}} \sum_i \underline{u}^*_\lambda(r_i)\cdot \underline{d}_{12}\, \rho^i_{12}(t)$$

$$\boxed{\partial_t b_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa)\, b_\lambda - i \sum_i g^i_\lambda\, \rho^i_{12}(t)}$$

mit Kopplungsstärke des i-ten ZNS an die Lichtmode λ

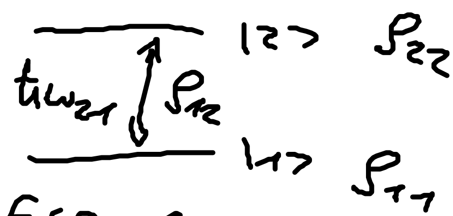
$$g^i_\lambda = i\, \underline{d}_{12} \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar\varepsilon_0}}\, \underline{u}^*_\lambda(r_i)$$

→ Dipolmomente treiben Mode

→ " koppeln mit Stärke $u^*_\lambda(r_i)$ an

5.2 Beschreibung der Materie

• Bewegungsgl. für ZNS:



$$\partial_t \rho^i_{12} = (-i\omega_{21} - \gamma)\, \rho^i_{12} + i\, \frac{d^i_{12}\cdot E(r_i,t)}{\hbar} \underbrace{(\rho^i_{11} - \rho^i_{22})}_{\Delta^i_{12}\ \text{Inversion}}$$

→ Feld nach Moden entwickeln $\hat{=}\ b_\lambda$

•

$$\partial_t \rho_{12}^i = (-i\omega_{21} - \gamma)\rho_{12}^i - i\sum_\lambda (g_\lambda^i)^* b_\lambda \Delta_{12}^i \qquad (\mathrm{I})$$

$$\partial_t \Delta_{12}^i = -2i \sum_\lambda (g_\lambda^{i*} \rho_{12}^i b_\lambda^* - g_\lambda^i \rho_{21}^i b_\lambda) - (\Delta_{12}^i - \Delta_0)\Gamma \qquad (\mathrm{II})$$

- Bemerkung:

(a) I u. II beschreiben Kopplung ρ_{12}^i u. Δ_{12}^i an alle Feldmoden

(b) γ in I beschreibt phenom. Dämpfung (Phononen)

(c) ~~~ in (II) beschreibt Relaxation der Inversion zu einem Gleichgewichtswert Δ_0 in der Zeit $\frac{1}{\Gamma}$, wenn man Lichtkopplung abschaltet.
In HL laser wird Δ_0 durch ext. Pumpstrom vorgegeben

(d) $\Delta_0 < 0$

5.3 Lasergleichungen für 1 Mode

- Def.: $p = \sum_i \rho_{12}^i$, $\Delta = \sum_i \Delta_{12}^i$, $\Delta_0 \to N\Delta_0$

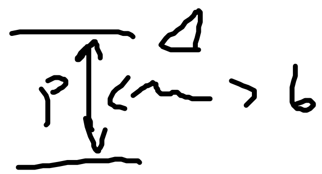
1 Mode → λ Index weglassen, $g_\lambda^i = g = \text{const}$

$$\partial_t p = (-i\omega_{21} - \gamma)p - ig\,\underline{b}\,\Delta \qquad (\mathrm{I})$$

$$\partial_t \Delta = -(\Delta - \Delta_0)\Gamma - 2ig(p b^* - p^* b) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\partial_t b = (-i\omega - \varkappa) b - igp \qquad (\mathrm{III})$$

• gekoppelte DGLs, nichtlinear, da Produkte $b\Delta$



• Idee: Lsg. schwingt mit Resonatormode ω ($\approx \omega_{21}$)

$\to$ $p(t) = p_0(t)\, e^{-i\omega t}$, $b(t) = b_0(t)\, e^{-i\omega t}$

schnelle Relaxation: $\gamma p \gg \partial_t p$ $\to$ $b_0(t)$ versklavt $p_0(t)$

$$p_0(t) = -i g \frac{b_0 \Delta}{\gamma}$$

Einsetzen in (III) führt auf Photonzahl $n = b_0^* b_0$

• Laserratengleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t \Delta &= -\Gamma(\Delta - \Delta_0) - 2nw\Delta \qquad (\mathrm{IIIa}) \\ \partial_t n &= -2\kappa n - nw\Delta \qquad (\mathrm{IV}) \end{aligned}}$$

mit $w = \frac{2g^2}{\gamma}$

• Bemerkung:

(a) nichtl. gekoppelte DGLs

(b) Resonatorverluste κ dämpfen Feld

(c) $w = 2g^2/\gamma$ Rate mit der ein angeregtes Atom ein Photon pro Sekunde aussendet

(d) stimulierte Emission

für $\Delta = const$ und $\varkappa = 0$ (keine Verluste)

(IV) $n(t) = n_0 e^{-w\Delta t}$

für $\varrho_{11} - \varrho_{22} = 0 - 1 = -1 = \Delta$, dann wächst Photonenzahl mit der Zeit w^{-1}

(e) wenn endl. Photonenzahl n erzeugt wird dann verringert sich Inversion (IIa)

5.4 Stationärer Betrieb

- stationäre Lös.: $\dot{\Delta} = 0 = \dot{n}$

aus (IIa): $\Delta = \dfrac{T\Delta_0}{T + 2nw}$

aus (IV): $n(2\varkappa + w\Delta) = n\left(2\varkappa + \dfrac{Tw\Delta_0}{T+2nw}\right) = 0$

zwei Lösungen für n: $n_1 = 0$

n_2 für $\Delta_0 < 0$

$2\varkappa(T + 2n_2 w) = wT|\Delta_0|$

$$\Rightarrow n_2 = \underbrace{\left(\frac{w|\Delta_0| - 2\varkappa}{4\varkappa w}\right)T}_{\text{Photonzahl} > 0}$$

da $wn_2 > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{w|\Delta_0|}{4\varkappa} - \dfrac{1}{2}\right)T > 0$

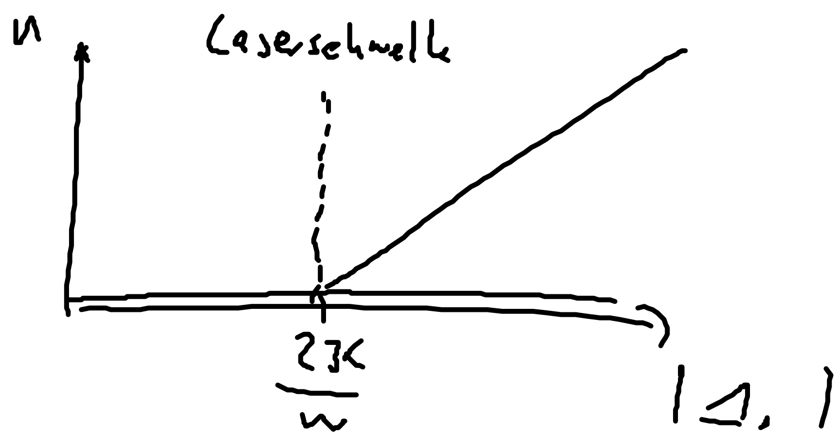
$\Rightarrow$ Laserbedingung : $\boxed{|\Delta_0| > \frac{2\kappa}{w}}$

· Bemerkungen :

(a) Der gepumpte GGwert der Inversion $\Delta_0 < 0$ muß groß genug sein, um Verlust κ zu kompensieren

(b) Unter kritischen Wert Pumpleistung $|\Delta_0|$ tritt keine Lasertätigkeit auf $(n_1 < 0)$

(c) Überschreitet $|\Delta_0|$ den krit. Wert, so ist $(n_2 \neq 0)$ Lasertätigkeit möglich



(d) $n_1 = 0$ muß falsch sein, da Laser wenigstens als Lampe funktionieren sollte
(nicht in Theorie enthalten)

5.5 Dynamische Betrachtungen

· Ratengl. für Photonzahl : $\partial_t(\Delta - \Delta_0) \ll T(\Delta - \Delta_0)$

$\rightarrow$ schnelle Relax. von $\Delta \rightarrow \Delta_0$

(wieder Versklavung durch langsame Feldamplitude b_0)

$$\Gamma(\Delta - \Delta_0) = -2nw\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{2nw}{\Gamma}}$$

einsetzen in (IV)

$$\Rightarrow \dot{n} = (-2\kappa - w\Delta_0)n + \frac{2w^2\Delta_0 n^2}{\Gamma}$$

- Photonenzahlratengl. für kleinen n:

$$\boxed{\partial_t n = (-2\kappa - w\Delta_0)n + \frac{2w^2\Delta_0 n^2}{\Gamma}}$$

- Bemerkungen:

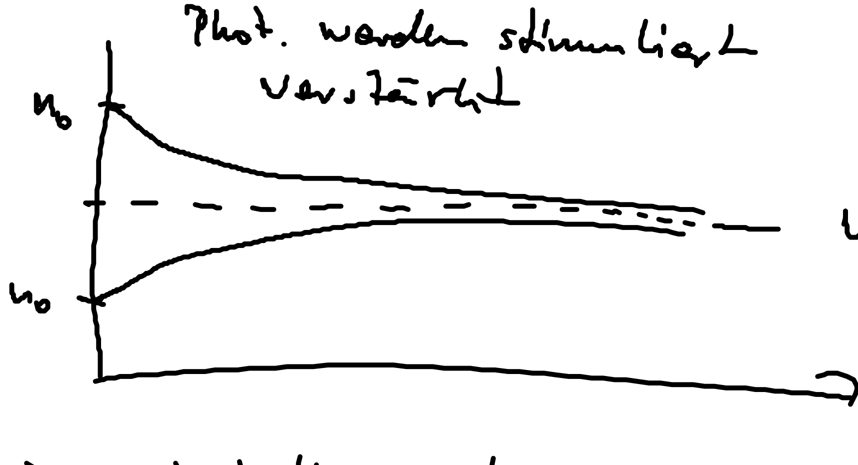
(a) Erster Term bewirkt:

$$n(t) = n_0 e^{(-2\kappa + w|\Delta_0|t)} \qquad n_0 = n(t=0)$$

Für eine vorgegebene Photonenzahl im Resonator n_0

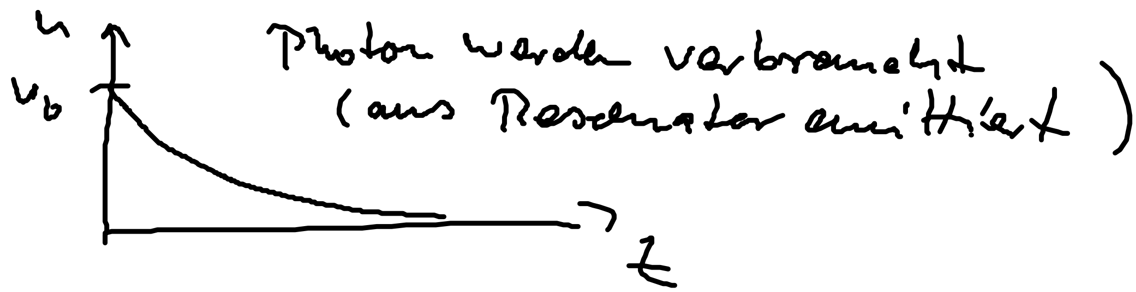
(i) oberhalb der Laserschwelle

Anwachsende Photonenzahl (st. Em. komp. Verluste)



$$n_{stat} = \left(\frac{w|\Delta_0| - 2\varkappa}{2w^2|\Delta_0|} \right) \Gamma$$

(ii) unterhalb der Laserschwelle: $n \to 0$



(b) Startprozess über spontane Emission, nicht in Theorie um dazu QM Lichtfeld

- Ausblicken:

für hohe Photonenzahl volle Dynamik

kann man Stabilitätsanalyse machen

$$n(t) = n_{stat} + \delta n(t), \quad \Delta = \Delta_{stat} + \delta\Delta(t)$$

Einsetzen in Lasergleichungen

$\longrightarrow$ Relaxationsoszillation


u(t)
u_{stat}
t