6.9. Cavity-QED in starker Kopplung: (Jaynes-Cummings-Modell)

$$H_{el-pt} = \hbar \sum_{\lambda\mu\underline{k}} \sum_{q\sigma} M^{\underline{k}q}_{\lambda\mu}\, a^{\dagger}_{\lambda\underline{k}} a_{\mu\underline{k}} \left(c^{\dagger}_{q\sigma} + c_{q\sigma}\right)$$

quantisierte Licht-Materie-Wechselwirkung

<u>Heute</u>: rein Bandmodell, Zwei-Niveau-System, nur 1-Resonatormode, eine Polarisation für cavity QED

$$H^{cav}_{el-pt} = -\hbar M \left(a^{\dagger}_{v} a_{c} c^{\dagger} + a^{\dagger}_{c} a_{v} c\right)$$

bereits in Drehwellennäherung (RWA)

und
$$\begin{pmatrix} \text{———} \; |c\rangle \\ \text{———} \; |v\rangle \end{pmatrix}$$
conduction band
valence band state

$$H = \hbar\omega_v a^{\dagger}_{v} a_{v} + \hbar\omega_c a^{\dagger}_{c} a_{c} + \hbar\omega_0 c^{\dagger} c + H^{cav}_{el-pt}$$

Jaynes-Cummings-Modell

$$\partial_t \langle a^{\dagger}_{v} a_{v}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, a^{\dagger}_{v} a_{v}]\rangle = -2\,\mathrm{Im}\left[M \langle a^{\dagger}_{v} a_{c} c^{\dagger}\rangle\right]$$

$$\partial_t \langle a^{\dagger}_{c} a_{c}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, a^{\dagger}_{c} a_{c}]\rangle = 2\,\mathrm{Im}\left[M \langle a^{\dagger}_{v} a_{c} c^{\dagger}\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \partial_t \left\{ \langle a_v^+ a_v \rangle + \langle a_c^+ a_c \rangle \right\} = 0$$

$$\langle a_c^+ a_c \rangle + \langle a_v^+ a_v \rangle = \text{const.} = 1$$

Ein-Elektron-Annahme
(keine Mehr-Elektronen-Prozesse)

typischerweise fällig für Atome oder
aber für Quantenpunkte
mit einer Basislänge von weniger
als 20 nm

Dichten werden getrieben von der photon-assistierten Polarisation:

$$\partial_t \langle a_v^+ a_c c^+ \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, a_v^+ a_c c^+] \rangle$$

$$= -i \Delta \langle a_v^+ a_c c^+ \rangle - i M \langle a_c^+ a_c \rangle$$

$$- i M \left\{ \langle a_c^+ a_c c^+ c \rangle - \langle a_v^+ a_v c^+ c \rangle \right\}$$

wobei $\Delta = \omega_v - \omega_c + \omega_0$
Detuning zwischen Resonatormode
und ZNS

Hierarchie-Problem im Heisenberg-Bild

Anfangsbedingungen setzen: z.B. $\langle a_c^+ a_c \rangle(0) = 1$

$\langle c^+ c \rangle(0) = 0$

$\Delta = 0$

Ein-Elektronannahme:

$$a_c^+ a_c + a_v^+ a_v = \underline{1}$$

$$\langle a_v^\dagger a_v c^\dagger c\rangle = \langle(\mathbb{1} - a_c^\dagger a_c) c^\dagger c\rangle = \langle c^\dagger c\rangle - \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c\rangle$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle = -\underline{i} M \langle a_c^\dagger a_c\rangle$$
$$- \underline{i} 2M \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c\rangle$$
$$+ \underline{i} M \langle c^\dagger c\rangle$$

weil geschlossen und durch AB weiß man, daß $\langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c\rangle = 0$

$$\partial_t \langle c^\dagger c\rangle = -2\,\mathrm{Im}\left[M \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle\right] = \partial_t \langle a_v^\dagger a_v\rangle$$

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c\rangle - \partial_t \langle c^\dagger c\rangle = -4\,\mathrm{Im}\left[M \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle\right]$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle = -\underline{i} M \langle a_c^\dagger a_c\rangle + \underline{i} M \langle c^\dagger c\rangle$$

$$\partial_t^2 \left\{\langle a_c^\dagger a_c\rangle - \langle c^\dagger c\rangle\right\} = -4\,\mathrm{Im}\left[M\, \partial_t \langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle\right]$$
$$= 4\,\mathrm{Im}\left[M^2 \underline{i} \left\{\langle a_c^\dagger a_c\rangle - \langle c^\dagger c\rangle\right\}\right]$$

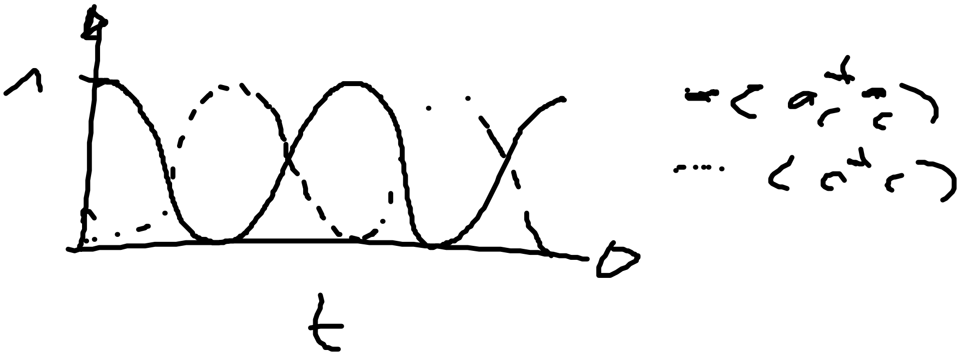
wenn wir wissen, daß $M \in \mathbb{R}$

$$= 4M^2 \left\{\langle a_c^\dagger a_c\rangle - \langle c^\dagger c\rangle\right\}$$

was ist die AB:

$$\langle a_c^\dagger a_c\rangle(t) - \langle c^\dagger c\rangle(t) = \cos(2Mt)$$
$$= \cos^2(Mt) - \sin^2(Mt)$$

Identifikation über AB



Problem: es gilt nur für ganz spezielle AB

$$0 \leq \langle a_r^\dagger a_c c^\dagger c\rangle$$

<u>Idee</u>: des Jaynes-Cummings-Modells

Photonwahrscheinlichkeiten zu berechnen

$$\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

$$\langle c^\dagger c\rangle = \langle c^\dagger c\, \mathbb{1}\rangle = \sum_n \langle c^\dagger c\, |n\rangle\langle n|\rangle$$

$$= \sum_n n \,\langle |n\rangle\langle n|\rangle$$

$$\langle a_v^\dagger a_c c^\dagger\rangle = \sum_n \sqrt{n+1}\, \langle a_v^\dagger a_c\, |n+1\rangle\langle n|\rangle$$

Bwgl. aufstellen: $\Delta = 0$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle\langle n+1|\rangle = -2\,\mathrm{Im}\left[M \langle a_v^\dagger a_r |n+1\rangle\langle n|\rangle\right]$$

$$\partial_t \langle a_e^\dagger a_r |n\rangle\langle n|\rangle = 2\,\mathrm{Im}\left[M \langle a_v^\dagger a_r |n+1\rangle\langle n|\rangle\right]$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n|\rangle = +iM\langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle\langle n+1|\rangle$$
$$- iM\langle a_r^\dagger a_c |n\rangle\langle n|\rangle$$

Jetzt lösen wie vorher

$$\partial_t \left\{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle - \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \right\}$$
$$= -4M^2(n+1) \left\{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle - \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \right\}$$

Jetzt AB, bspw. $\langle a_c^\dagger a_c |N\rangle\langle N| \rangle = 1, N \in \mathbb{N}_0$

und $\langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle = 0, n \neq N$

$\langle a_v^\dagger a_v |n\rangle\langle n| \rangle = 0, n \in \mathbb{N}_0$

allgemeine Lösung für N:

$$\langle a_c^\dagger a_c |N\rangle\langle N| \rangle(t) = \cos^2(\underbrace{M\sqrt{N+1}}_{=\Omega_R^N}\, t)$$

Ergebnis des Jaynes-Cummings-Modells mit der generalisierten Rabifrequenz Ω_R^N

Bemerkungen:

1) $\Omega_R^N \longrightarrow$ semiklassische für $N \gg 1$

d.h. quantenoptische sind zu erwarten, wenn die Intensitäten nicht zu hoch sind

2) Jaynes-Cummings-Modell (JCM) ist das einfachste, aber vollquantisierte Modell, das es gibt und analytisch lösbar ist.

3) Besonderheit: es gibt Rabioszillation, wenn $N = 0$ ist; die nennt

Vakuum Rabi Oszillationen

wegen der Spontanemission

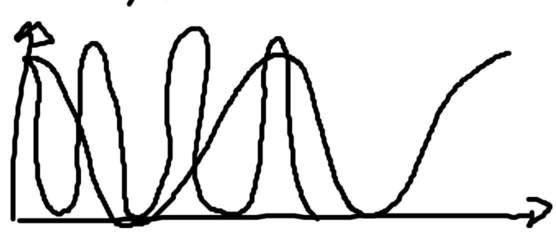
4) die Idee des JCM sollte man sich merken, da diese Entwicklung nach Besetzungszahlzuständen immer hilfreich ist

$\Rightarrow$ geht nur, wenn die Dynamiken disjunkt ablaufen: geht bei der Cavity-QED

$$H = H^{(1)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(3)} \dots$$

5) Rabi-Oszillationen mit diskreter Frequenz

$$\Omega_R^N = M\sqrt{N+1}$$



6.11: Nichtresonantes Cavity-QED

bislang: $\Delta = 0$
$= \omega_v - \omega_c + \omega_0$

jetzt $\Delta \neq 0$, Photonmode leicht verstimmt gegen das ZNS

<u>BWGl.</u>: $\ddot{V}_{n+1} + i\Delta \dot{V}_{n+1} + \frac{\Omega_R^{N+1}}{4} V_{n+1} = 0$

$V_{n+1} = \langle a_v^+ a_v |n+1\rangle\langle n+1| \rangle$

allgemeiner Lösungsansatz:

$$V_{n+1}(t) = \left(\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2\,N+1}}}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_{n+1}^2}}{2}\right)t} + \left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2\,N+1}}}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_{n+1}^{2R}}}{2}\right)t}$$

Herleitung leichter über den Zeitentwicklungsoperator $U_I(t)$
(Scully, Roemer; Quantenoptik)

<u>Trotzdem</u>: AB für die Elektronen
$\langle a_c^+ a_c |n\rangle\langle n| \rangle = 1$
$\langle a_v^+ a_v |n\rangle\langle n| \rangle = 0$

$$\langle a_v^\dagger a_v | n+1\rangle\langle n+1| \rangle = \frac{\Omega_R^{2\,N+1}}{\Delta^2/4 + \Omega_R^{2\,N+1}} \sin^2\left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Omega_R^{2\,N+1}}\, t\right]$$

$$\langle a_c^\dagger a_c | n\rangle\langle n| \rangle = \cos^2\left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Omega_R^{2\,N+1}}\, t\right] + \sin^2\left[\qquad\right] \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + 4\Omega_R^{2\,N+1}}$$

Zur Probe: $\Delta \to 0$

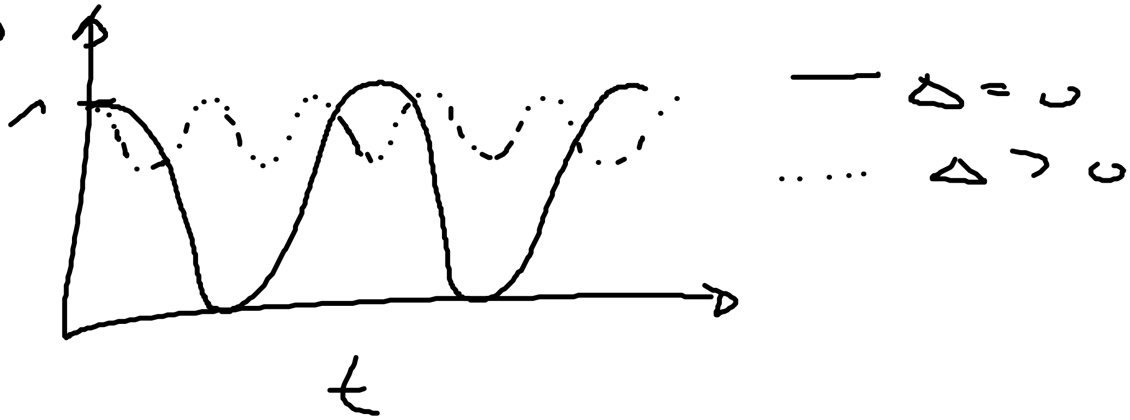
Lösungen werden reproduziert

Bemerkungen:

1) Problem ist nun einiges schwieriger
   Wechselwirkung im WW-Bild nun zeitabhängig $\to$ Lösungen im Schrödinger-Bild

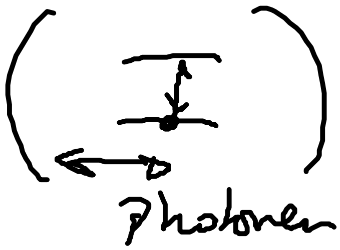
2) Dehnung hat einen Effekt auf die Amplitude und die Rabifrequenz
   Rabifrequenz wird größer $\Omega_R^{N+1} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + M^2(N+1)}$
   Amplitude auf Kosten der Rabifrequenz wird kleiner und zwar mit $\frac{\Omega^2}{\Delta^2+\Omega^2} \leq 1$

also



6.12: Resonatorverluste

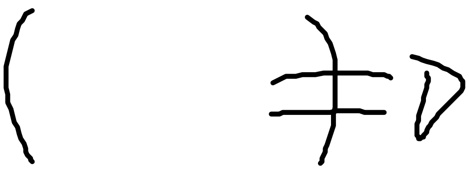
bisher



das System ist abgeschlossen

um Informationen zu erhalten:

jetzt



⇒ Photonen kommen raus über Tunnelprozeß

$$H_{diss} = \sum_q G_q \left(c^\dagger d_q + c\, d_q^\dagger\right)$$

⟶ Lebenszeit vom Photon

$d_q^{(\dagger)}$ dissipative Moden

G_q ist Tunnelmatrixelement

$$\partial_t \langle O \, |n\rangle\langle m| \rangle\Big|_{diss} =$$

$$= i \, (n-m) \, \langle O \, |n\rangle\langle m| \rangle$$

$$+ i \sum_q G_q \Big\{ \sqrt{n+1} \, \langle O \, |n+1\rangle\langle m| \, d_q \rangle$$

$$+ \sqrt{n} \, \langle O \, |n-1\rangle\langle m| \, d_q^\dagger \rangle$$

$$+ \sqrt{m+1} \, \langle O \, |n\rangle\langle m+1| \, d_q^\dagger \rangle$$

$$+ \sqrt{m} \, \langle O \, |n\rangle\langle m-1| \, d_q \rangle \Big\}$$

man geht in den Rotating-Frame

$$\partial_t \langle O \, |n\rangle\langle m| \, d_q \rangle^R\Big|_{diss}$$

$$= i \sum_{q'} G_{q'} \Big\{ \sqrt{n} \, \langle O \, |n-1\rangle\langle m| \, d_{q'}^\dagger d_q \rangle e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t}$$

$$+ \sqrt{m+1} \, \langle O \, |n\rangle\langle m+1| \rangle \, e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t}$$

$$+ \sqrt{m+1} \, \langle O \, |n\rangle\langle m+1| \, d_{q'}^\dagger d_q \rangle e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t} \Big\}$$

$$\langle O \, |n\rangle\langle m| \, d_q^\dagger d_{q'} \rangle \approx \langle O \, |n\rangle\langle m| \rangle \underbrace{\langle d_q^\dagger d_{q'} \rangle}_{\delta_{qq'} n_q}$$

mit Markovnäherung, gut, wenn

$$|\omega_c - \omega_v| \gg |G_q|$$

$$K := \sum_q |G_q|^2 \, \delta(\omega_0 - \omega_q)$$

führt auf die Lebenszeit und ein Beispiel „8" :

$$\partial_t \langle O \, |n\rangle\langle m| \rangle\Big|_{diss} =$$

$= -(m+n)\kappa \, \langle 0|n\rangle\langle m|$

$\quad + 2\sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \, \langle 0|n+1\rangle\langle m+1|$

also Dynamik der n-Photon-Unterräume ist nicht mehr disjunkt und JCM Lösung verliert an Gültigkeit, Problem dennoch analytisch lösbar über von-Neumann-Gleichung

<u>Beispiel</u>: $M \gg \kappa \neq 0$