

6.9. Cavity-QED in starker Kopplung: Jaynes-

$$H_{el-ph} = \hbar \sum_{\lambda, \mu \neq 0} \sum_{\sigma} M_{\lambda\mu}^{\sigma} a_{\lambda\mu}^{\dagger} a_{\sigma} (c_{\sigma 0}^{\dagger} + c_{\sigma 0})$$

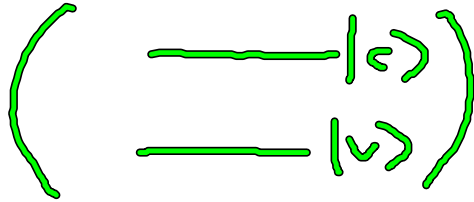
(Cummings-Modell)

quantisierte Licht-Materie-Wechselwirkung

Heute: Reines Bandmodell, Zwei-Niveau-System, nur 1-Resonatormode, eine Polarisation für cavity QED

$$H_{el-ph}^{cov} = -\hbar M (a_v^{\dagger} a_c c^{\dagger} + a_c^{\dagger} a_v c)$$

bereits in Drehwellennäherung (RWA)

und  conduction band
valence band state

$$H = \hbar \omega_v a_v^{\dagger} a_v + \hbar \omega_c a_c^{\dagger} a_c + \hbar \omega_0 c^{\dagger} c + H_{el-ph}^{cov}$$

Jaynes-Cummings-Modell

$$\partial_t \langle a_v^{\dagger} a_v \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, a_v^{\dagger} a_v] \rangle = -2 \text{Im} [M \langle a_v^{\dagger} a_c c^{\dagger} \rangle]$$
$$\partial_t \langle a_c^{\dagger} a_c \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, a_c^{\dagger} a_c] \rangle = 2 \text{Im} [M \langle a_v^{\dagger} a_c c^{\dagger} \rangle]$$

$$\Rightarrow \partial_t \{ \langle a_v^\dagger a_v \rangle + \langle a_c^\dagger a_c \rangle \} = 0$$

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle + \langle a_v^\dagger a_v \rangle = \text{const.} = 1$$

Für-Elektromannahme
(reine Mehr-Elektronen-Paras)

typischerweise gültig für Atome oder
aber für Quantenpunkte

mit einer Besetzung von weniger
als 20 nm

Dichten werden gehalten von der photo-
anisotropen Polarisation:

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c^\dagger c^\dagger \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, a_v^\dagger a_c^\dagger c^\dagger] \rangle$$

$$= -i \Delta \langle a_v^\dagger a_c^\dagger c^\dagger \rangle - i M \langle a_c^\dagger a_c \rangle$$

$$- i M \{ \langle a_c^\dagger a_c c^\dagger c \rangle - \langle a_v^\dagger a_v c^\dagger c \rangle \}$$

$$\text{wobei } \Delta = \omega_v - \omega_c + \omega_0$$

Detuning zwischen Resonanzatom
und ZWS

Hierarchie-Problem im Heisenberg-Bild

Anfangsbedingungen setzen: bspw. $\langle a_c^\dagger a_c \rangle(0) = 1$

$$\langle c^\dagger c \rangle(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Für-Elektromannahme:

$$a_c^\dagger a_c + a_v^\dagger a_v = \underline{11}$$

$$\langle a_v^\dagger a_v \rangle(t) = \langle (1 - a_r^\dagger a_c) \rangle(t) = \langle \sigma^z \rangle - \langle a_r^\dagger a_c \rangle$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle &= -iM \langle a_r^\dagger a_c \rangle \\ &\quad - i2M \langle a_r^\dagger a_c \sigma^z \rangle \\ &\quad + iM \langle \sigma^z \rangle \end{aligned}$$

weil geschlossen und durch AB
weiß man, dass $\langle a_r^\dagger a_c \sigma^z \rangle = 0$

$$\partial_t \langle \sigma^z \rangle = -2\gamma M [M \langle a_v^\dagger a_c \rangle] = \partial_t \langle a_v \rangle$$

$$\partial_t \langle a_r^\dagger a_c \rangle - \partial_t \langle \sigma^z \rangle = -4\gamma M [M \langle a_v^\dagger a_c \rangle]$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle = -iM \langle a_r^\dagger a_r \rangle + iM \langle \sigma^z \rangle$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \{ \langle a_r^\dagger a_r \rangle - \langle \sigma^z \rangle \} &= -4\gamma M [M \partial_t \langle a_v^\dagger a_c \rangle] \\ &= 4\gamma M [M^2 \{ \langle a_r^\dagger a_r \rangle - \langle \sigma^z \rangle \}] \end{aligned}$$

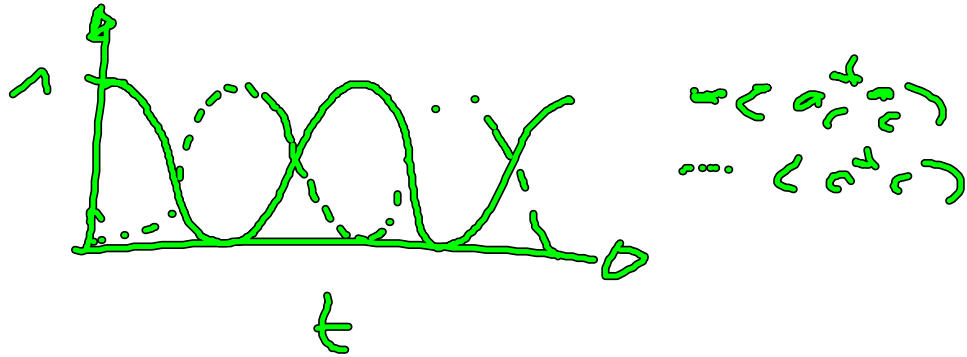
wenn wir wissen, dass $M \in \mathbb{R}$

$$= 4M^2 \{ \langle a_r^\dagger a_r \rangle - \langle \sigma^z \rangle \}$$

was ist die AB:

$$\begin{aligned} \langle a_r^\dagger a_r \rangle(t) - \langle \sigma^z \rangle(t) &= \cos(2Mt) \\ &= \cos^2(Mt) - \sin^2(Mt) \end{aligned}$$

Identifikation über AB



Problem: es gibt nur für jetzt
spezielle AFS

$$0 \leq \langle a_r^\dagger a_c^\dagger a_c a_r \rangle$$

Idee: des Jaynes-Cummings-Modells
Photonwahrscheinlichkeiten zu
berechnen

$$\underline{11} = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

$$\langle a_c^\dagger a_c \rangle = \langle a_c^\dagger a_c \underline{11} \rangle = \sum_n \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle \langle n| \rangle$$

$$= \sum_n n \langle |n\rangle \langle n| \rangle$$

$$\langle a_v^\dagger a_c a_c^\dagger \rangle = \sum_n \sqrt{n+1} \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle \langle n| \rangle$$

Bzgl. aufstellen: $\Delta = 0$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle \langle n+1| \rangle = -2 \text{Im} [M \langle a_v^\dagger a_r |n+1\rangle \langle n+1| \rangle]$$

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle \langle n| \rangle = 2 \text{Im} [M \langle a_v^\dagger a_r |n+1\rangle \langle n+1| \rangle]$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle \langle n+1| \rangle = +i M \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle \langle n+1| \rangle$$

$$- i M \langle a_r^\dagger a_r |n\rangle \langle n| \rangle$$

Jetzt lösen wir vorher

$$\partial_t \left\{ \langle a_c^\dagger a_c | n \rangle \langle n+1 \rangle - \langle a_v^\dagger a_v | n+1 \rangle \langle n+1 \rangle \right\} \\ = -4M^2(n+1) \left\{ \langle a_c^\dagger a_c | n \rangle \langle n+1 \rangle - \langle a_v^\dagger a_v | n+1 \rangle \langle n+1 \rangle \right\}$$

Setzt AB, bspw. $\langle a_c^\dagger a_c | N \rangle \langle N | \rangle = 1, N \in \mathbb{N}_0$
und $\langle a_c^\dagger a_c | n \rangle \langle n | \rangle = 0, n \neq N$
 $\langle a_v^\dagger a_v | n \rangle \langle n | \rangle = 0, n \in \mathbb{N}_0$

allgemeine Lösung für N :

$$\langle a_c^\dagger a_c | N \rangle \langle N | \rangle(t) = \cos^2 \left(\underbrace{M \sqrt{N+1} t}_{= \Omega_K^N} \right)$$

Ergebnis der Jaynes - Cummings - Modell
mit der generalisierten Rabi-Frequenz Ω_K^N

Bemerkungen:

- 1) $\Omega_K^N \rightarrow$ semi-klassisch für $N \gg 1$
d.h. quantenphysische Fried zu
erwarten, wenn die Intensitäten
nicht zu hoch sind

2) Jaynes - Cummings - Modell (JCM) ist das einfachste, aber vollquantisiertes Modell, das es gibt und analytisch lösbar ist.

3) Besonderheit: es gibt Rabi-Oszillationen, wenn $N=0$ ist; die nennt man Vacuum Rabi-Oszillationen wegen der Spontanemission

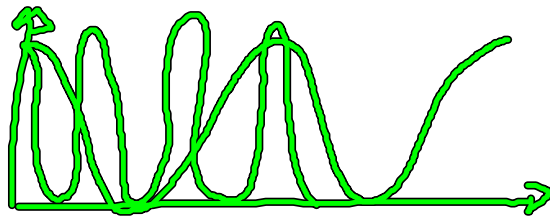
4) die Idee des JCM sollte man sich merken, da diese Entwicklung noch Besetzungszahlzuständen sinnvoll ist

\Rightarrow geht nur, wenn die Dynamiken disjunkt ablaufen: geht in der Cavity-QED

$$H = H^{(1)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(3)} \dots$$

5) Rabi-Oszillationen mit diskreter Frequenz

$$\Omega_R^N = M \sqrt{N+1}$$



$$N=0$$

$$N=3$$

6.11: Nichtresonantes Cavity-QED

bislang: $\Delta = 0$
 $= \omega_V - \omega_C + \omega_0$

jetzt $\Delta \neq 0$, Photonmode leicht ver-
 schiebt gegen das ZUS

BWgl.: $\ddot{V}_{n+1} + i\Delta \dot{V}_{n+1} + \frac{\Omega_R^{2n+1}}{4} V_{n+1} = 0$

$V_{n+1} = \langle a_V^\dagger a_V | n+1 \rangle | n+1 \rangle$

allgemeines Lösungsansatz:

$$V_{n+1}(t) = \left(\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2n+1}}}{2} \right) e^{-i \left(\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2n+1}}}{2} \right) t} + \left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2n+1}}}{2} \right) e^{-i \left(\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^{2n+1}}}{2} \right) t}$$

Hesleitung leuchtet über den
 Zeitentwicklungsgenerator $U_T(t)$
 (Sully, Poemes; Quantenoptik)

Trotzdem: AB für die Elektronen

$\langle a_C^\dagger a_C | n \rangle | n \rangle = 1$

$\langle a_V^\dagger a_V | n \rangle | n \rangle = 0$

$$\langle a^\dagger a | n+1 \rangle \langle n+1 \rangle = \frac{\Omega^2 N_H}{\Delta^2/4 + \Omega^2 R} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Omega^2 R} t \right]$$

$$\langle a^\dagger a | n \rangle \langle n \rangle = \cos^2 \left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Omega^2 R} t \right] + \sin^2 \left[\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Omega^2 R} t \right] \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + 4\Omega^2 R}$$

aus Probe: $\Delta \rightarrow 0$

Lösungen werden reproduziert

Bemerkungen:

1) Problem ist nun einiges Schwereinges Wechselwirkung im WW-Bild nun zeitabhängig \rightarrow Lösungen im Schrödingers-Bild

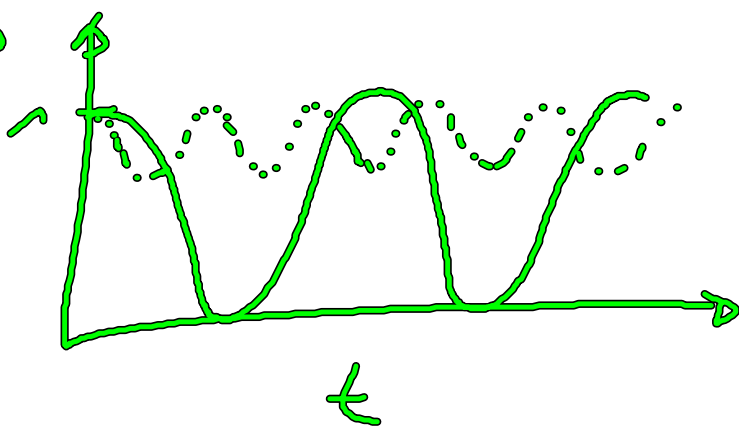
2) Dehnung hat einen Effekt auf die Amplitude und die Rabi-Frequenz

Rabi-Frequenz wird größer $\Omega_R^{NH} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + H^2(\omega_2)}$

Amplitude auf Kosten der Rabi-Frequenz wird kleiner und

zwar mit $\frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \leq 1$

also



— $\Delta = 0$
 $\Delta > 0$

6.12 : ROS matrixreduktion

bisher $\left(\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right)$ das System ist abgeschlossen
 Photonen

um Informationen zu erhalten:

jetzt $\left(\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right) \Rightarrow$ Photonen kommen raus über Tunnelprozess

$$H_{\text{diss}} = \sum_q G_q (c^\dagger d_q + c d_q^\dagger)$$

→ Lebenszeit von Photon

$d_q^{(\dagger)}$ dissipative Moden

G_q ist Tunnelwahrscheinlichkeit

$$\partial_t \langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle / \text{diss} =$$

$$= \frac{i}{2} (n-m) \langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle$$

$$+ \frac{i}{2} \sum_q G_q \left\{ \sqrt{n+1} \langle 0 | n+1 \rangle \langle m | \rangle d_q \right. \\ \left. + \sqrt{n} \langle 0 | n-1 \rangle \langle m | \rangle d_q^\dagger \right. \\ \left. + \sqrt{m+1} \langle 0 | n \rangle \langle m+1 | \rangle d_q^\dagger \right. \\ \left. + \sqrt{m} \langle 0 | n \rangle \langle m-1 | \rangle d_q \right\}$$

man geht in den Rotating-Frame

$$\partial_t \langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle^R / \text{diss}$$

$$= \frac{i}{2} \sum_{q'} G_{q'} \left\{ \sqrt{n} \langle 0 | n-1 \rangle \langle m | \rangle d_{q'}^\dagger d_q e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t} \right. \\ \left. + \sqrt{m+1} \langle 0 | n \rangle \langle m+1 | \rangle e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t} \right. \\ \left. + \sqrt{m+1} \langle 0 | n \rangle \langle m+1 | \rangle d_{q'}^\dagger d_q e^{-i(\omega_0 - \omega_{q'})t} \right\}$$

$$\langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle d_{q'}^\dagger d_q \approx \langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle \underbrace{\langle d_q^\dagger d_{q'} \rangle}_{\delta_{q q'} n_q}$$

mit Näherung, gut, wenn
 $|\omega_c - \omega_{q'}| \gg |G_{q'}|$

$$K := \sum_q |G_q|^2 f(\omega_0 - \omega_q)$$

führt auf die Lebenszeit und
 ein Beispiel ist:

$$\partial_t \langle 0 | n \rangle \langle m | \rangle / \text{diss}$$

$$= - (m+n)k < 0 \quad (n) < (m) \\ + 2 \sqrt{n+1} \sqrt{nt+1} < 0 \quad (n+1) < (m+1)$$

also Dynamik des n -Photon-
unterstärme ist nicht mehr
dispersiv und JCM Lösung
verliert an Gültigkeit,

Problem dennoch analytisch
lösbar über von-Kleinan-Gleichung

Beispiel:

$$M \gg k \neq 0$$

