

Bewegungsgleichungen mit cavity loss:

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle = -2\kappa n \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle + 2\kappa(n+1) \langle a_c^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n+1| \rangle + 2\sqrt{n+1} \text{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle]$$

$$\partial_t \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle = -\gamma \Delta \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle - \kappa(2n+1) \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle + \kappa \sqrt{(n+1)n} \langle a_v^\dagger a_c |n+2\rangle\langle n+1| \rangle - \frac{\gamma}{2} M \sqrt{n+1} \{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle - \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \}$$

$$\partial_t \langle |n\rangle\langle n| \rangle = -n(2\kappa) \langle |n\rangle\langle n| \rangle + 2\kappa(n+1) \langle |n+1\rangle\langle n+1| \rangle - 2\sqrt{n} \text{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n\rangle\langle n-1| \rangle] + 2\sqrt{n+1} \text{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle]$$

Beweisungen:

1) Resonatorverluste führen zu Ein- und Ausstrahlung im Dichte-matrix-Bild $\langle |n\rangle\langle n| \rangle$

2) im Operatorbild sieht der Verlust aus als
 $\partial_t \langle a^\dagger P a \rangle = -\kappa (P+S) \langle a^\dagger a \rangle$

$\partial_t \langle |n\rangle\langle n| \rangle |_{\text{diss}}$ koppelt an $\langle |n+1\rangle\langle n+1| \rangle$

$\partial_t \langle a^\dagger a \rangle |_{\text{diss}}$ " nur an sich selbst

\Rightarrow die Systemdynamik ist einfacher
 mit Dirac Matrixbild (Heirasche
 in den Operatoren)
aber: die Kosten haben das Heirasche-
 Problem

Beispiel, wie sinnvoll es ist, in
 verschiedenen Bildern rechnen zu können

3) $\mathcal{Q}_\xi \langle |u\rangle \langle u| \rangle = -n^2 k \langle |u\rangle \langle u| \rangle + 2k(n+1) \langle |u+1\rangle \langle u+1| \rangle$
 mit n multiplizieren, dann \sum_n

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_\xi \sum_n n \langle |u\rangle \langle u| \rangle &= \mathcal{Q}_\xi \sum_n \langle c^\dagger - |u\rangle \langle u| \rangle = \mathcal{Q}_\xi \langle c^\dagger c \rangle \\
 &= - \underbrace{\sum_n n^2 2k \langle |u\rangle \langle u| \rangle}_{= 2k \langle c^\dagger c c^\dagger c \rangle} + \underbrace{n(n+1) 2k \langle |u+1\rangle \langle u+1| \rangle}_{= \langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle 2k} \\
 &= 2k \langle c^\dagger c \rangle + 2k \langle c^\dagger c \rangle \\
 &= -2k \langle c^\dagger c \rangle
 \end{aligned}$$

4) Photoverlust führt zu experimentellen
 Signalen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Detektor} \quad D \text{ Zahlstatistik}$$

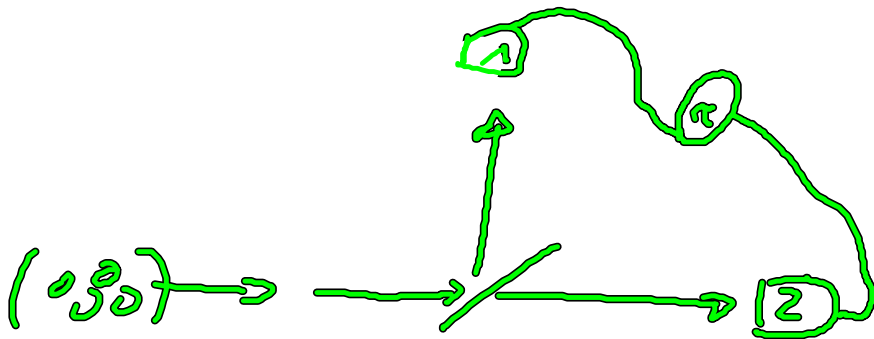
6.14: Photonenstatistik, §⁽¹⁾ (4,7)

heute: wie sind Photonen korreliert?
 welche Rolle spielen Interaktionen
 zwischen zwei Messsignalen.

interessant für Anwendungen:

- Quanteninformatik
- Quantenkryptographie
- Messprozesse werden verbessert
(quantum metrology)

Messung an Photodetektoren:



Hausbury Brown - Tavis Setup 1956
(Experimentell-astrophysiker)
Robert Hausbury Brown
Richard Q. Tavis

Intensitätsfluktuationen:

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle : I_1(t) I_2(t+\tau) : \rangle}{\langle I_1(t) \rangle \langle I_2(t+\tau) \rangle}$$

es werden zwei Messungen durchgeführt
an Detektor 1 und 2

Aufbau beantwortet Frage:

Wieviel weiß ich über das Messergebnis
an Detektor 2, wenn ich das Messergebnis
bereits erhalten habe?

1.) Fall: ich weiß also nichts.
also ist Zufall — Poissonstatistik

2.) Fall: Messe ich ein Photon an ①,
dann auch, reinlich sicher, an ②.
Super-Poisson (Bunching)

3.) Fall: Messe ich ein Photon ①,
dann mit hoher Wahrscheinlichkeit
nicht an ②.
Sub-Poisson (Anti-Bunching)
— nicht erklärbar in der
Maxwell-Θ-Theorie

$$\underline{QR} : g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle c^\dagger(t) c^\dagger(t+\tau) c(t+\tau) c(t) \rangle}{\langle c^\dagger(t) \rangle \langle c^\dagger(t+\tau) \rangle}$$

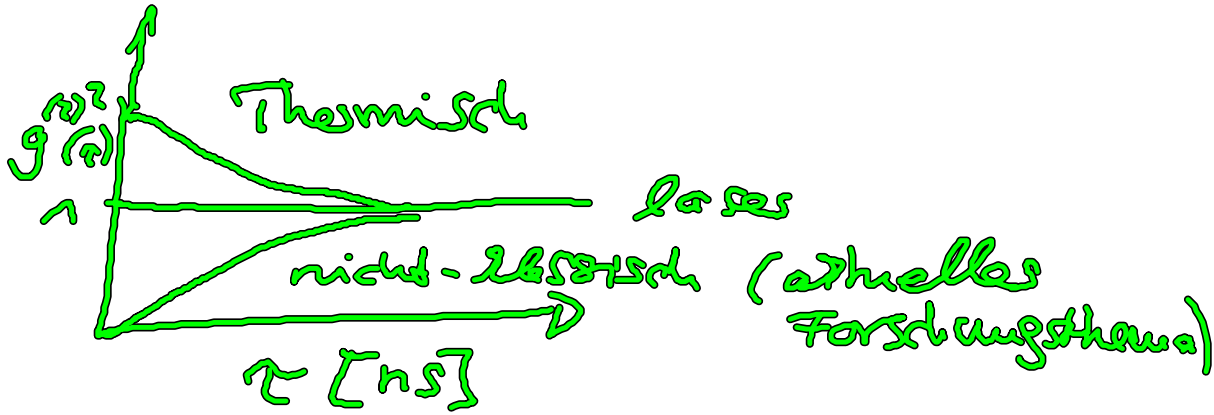
in Messung stationärer Fall

$$\text{also } g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle c^\dagger c^\dagger(\tau) c(\tau) c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$

$g^{(2)}(0) = 1 \longrightarrow$ Poisson-Statistik

$g^{(2)}(0) > 1 \longrightarrow$ Super-Poisson
= 2 (Thermisch)

$g^{(2)}(0) < 1 \longrightarrow$ sub-Poisson
 (nicht klassisch,
 z.B. Einzelphotonenemitter)



6.15 : Photonstatistik und Photonwahrscheinlichkeiten

1.) Poisson: Planck-Zustände sind
 reine Zustände
 $c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger c \rangle &= \sum_n n p(n) \\ &= \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} n \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{m,n}} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} n \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{p(n)} \end{aligned}$$

1 Poisson $p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$
 mit $|\alpha|^2 = \bar{n}$

2.) Freies thermisches Licht, rein
 thermischer Zustand

$$\langle c^\dagger c \rangle = \text{tr}(c^\dagger c \rho), \rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar \omega c^\dagger c}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad 1\text{-modiger Fall}$$

Wie sieht die Zustandssumme aus?

$$Z = \text{tr} (e^{-\beta H_{\text{kin}}(n)}) = \sum \langle n | e^{-\beta H_{\text{kin}}(n)} | n \rangle$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = \frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega}}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} = 1 + \bar{n}, \quad \text{weil Bose-Statistik}$$

mit $\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$

$$p(n) = \frac{1}{Z} \langle n | e^{-\beta H_{\text{kin}}(n)} | n \rangle$$

$$= \frac{1}{\bar{n} + 1} e^{-\beta \hbar \omega n}$$

$$\left(\frac{1}{e^{\beta \hbar \omega}} \right)^n = \left(1 - 1 + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega}} \right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{e^{\beta \hbar \omega} - 1}{e^{\beta \hbar \omega}} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

$$= \left(\frac{\bar{n} + 1 - 1}{\bar{n} + 1} \right)^n = \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

also $p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}$

$$S = \frac{\bar{n}}{(\bar{n} + 1)^{\bar{n} + 1}}, \quad \bar{n}^{\bar{n}} = e^{\ln \bar{n} \cdot \bar{n}} = e^{\bar{n} \ln \bar{n}}$$

3.) für nicht-klassisches Licht

$$\langle c^\dagger c \rangle = \bar{n}, \text{ oder } \langle c^\dagger c \rangle = \sum_n n \delta_{n, \bar{n}}$$

\bar{n} vorgegeben

jetzt kann $g^{(2)}$ ausrechnen: $\mathcal{I} = 0$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$
$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p^{(n)}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} n p^{(n)}\right)^2}$$

Poisson: $\sum_{n=0}^{\infty} n p^{(n)} = \bar{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p^{(n)} = \bar{n}^2$

Reduktion: $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{(n-2)!}$

Indexumbenennung: $m = n - 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{n+2}}{n!} = \bar{n}^2 e^{-\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^m}{m!}$$

$= \bar{n}^2 e^{\bar{n}}$

also: $g^{(2)}(0) = \frac{\bar{n}^2}{(\bar{n})^2} = 1$

Thermisch: $i) \sum_{n=0}^{\infty} n p^{(n)} = \bar{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p(n) = 2\bar{n}^2$$

Beweis (i): $\sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} \quad q = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} < 1$

$$= \frac{1}{\bar{n}+1} \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1} = \frac{q}{\bar{n}+1} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_q q^n$$

$$= \frac{q}{\bar{n}+1} \partial_q \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{q}{\bar{n}+1} \left(\frac{1}{1-q} \right)^2$$

$$= \frac{\bar{n}}{(\bar{n}+1)^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} \right)^2 = \frac{\bar{n}}{(\bar{n}+1)^2} \frac{(\bar{n}+1)^2}{\bar{n}}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{2\bar{n}^2}{(\bar{n})^2} = 2 \quad \text{für thermisches Licht}$$

Nichtklassisch: (Fock-Zustände)

$$p(n) = \delta_{n,N}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{(N-1)N}{(N)^2} = 1 - \frac{1}{N}$$

für $N=1$: Einzelphotonemission

für $N \gg 1$ $g^{(2)}(0) \rightarrow 1$

6.16: Jaynes-Cummings Modell mit Photonstatistiken

Anfangswerte werden wie folgt

berechnet

$$\langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} |n\rangle\langle n-1|0\rangle$$

$$= \langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} \rangle(0) \langle |n\rangle\langle n-1|0\rangle$$

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| = 2\gamma_n [H \sqrt{n+1} \langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} |n+1\rangle\langle n|]$$

$$\partial_t \langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} |n+1\rangle\langle n+1| = 2\gamma_n [H \sqrt{n+1} \langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} |n+1\rangle\langle n+1|]$$

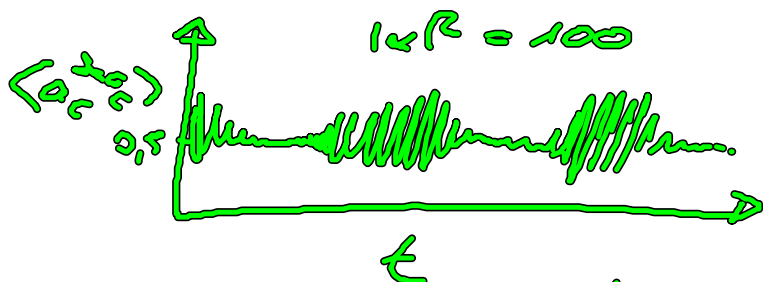
$$\partial_t \langle a_{y/c}^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| = -\gamma_n H \sqrt{n+1} \{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| - \langle a_{y/c}^\dagger a_{y/c} |n+1\rangle\langle n+1| \}$$

für das Endergebnis

$$\sum_n \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| = \langle a_c^\dagger a_c \rangle$$

Rabi-Oszillationen:

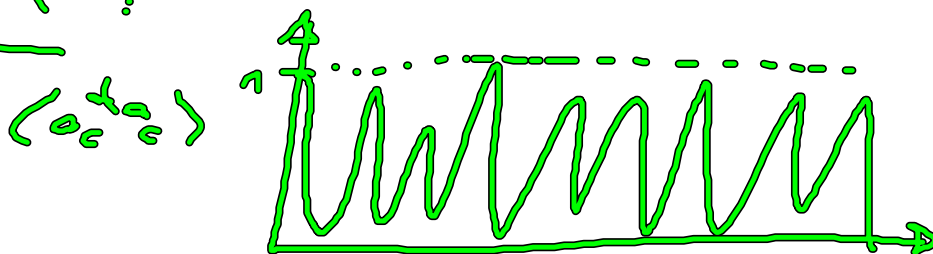
Poisson-Statistik (Case)



collapse & revivals
(Sely 1984)

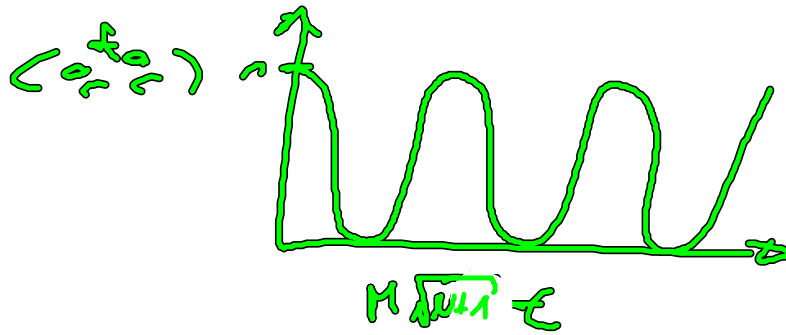
ein Effekt durch quantisierte Rabi-Frequenz
besonders: das Rabi-Verhalten

Thermisch:



€

nichtklassische Fall:



Bemerkungen:

- 1.) JCM ist sehr relevant für Grundlagenforschung
- 2.) JCM-Effekte (Collapse & Revival) sind durch moderne Fabrikationsverfahren experimentell erreichbar
aber: für collapse & revival noch keine analytische Lösung
- 3.) das Modell mit Verlusten kann zur Simulation von elektrisch getriebenen Einzelphotonenemittern herangezogen werden (SFS \rightarrow SP7)